



2025 - 2026

PC

Feuille d'exercices

Intégration

Exercice 1

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Existence et éventuellement calcul des intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ 2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx$ 3. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x) \, dx$ 4. $L = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - \cos t}$

Exercice 2

Prouver la convergence, puis, déterminer la valeur, de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}$.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - \cos t}$ 2. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$
3. $\int_0^{+\infty} \left(t - \sqrt{t^2 + 1} \right) dt$ 4. $\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) dt$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ 6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{\ln t} dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ 8. $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

Exercice 4

Discuter, en fonction des valeurs des paramètres α et β la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 2. $\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dx$

Exercice 5

Etudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales :

1. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \sin t}$ 2. $\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$ 3. $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ 5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^t}} dt$

Exercice 6

1. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ (Intégrale de Fresnel).

Exercice 7

Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$.

Exercice 8

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une application f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
2. Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = 0$. On remarquera que pour $t \in [1, +\infty[$, on a : $t \leq t^2$.
3. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge, et calculer I .

Exercice 9

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$.

1. Montrer que ces intégrales convergent, et que $I = J$.
2. Calculer la valeur commune à I et J .

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 2t + 3)^n}$.

1. Etudier la convergence de l'intégrale I_n .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 2)^n}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{2n-1}{4n} I_n$.
4. Calculer I_1 , et en déduire l'expression de I_n en fonction de n , à l'aide de factorielles.

Exercice 11

Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/t)}}{t} dt$ et calculer sa valeur. (E désigne la fonction « partie entière »).

Exercice 12

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \cdot \ln(1+t^2)} \end{cases}$.

1. Montrer que l'application f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$; déterminer la limite de f en 0 .
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer sa dérivée. En déduire les variations de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{t}} dt$.

1. Montrer que I converge.
2. A l'aide d'un changement de variable approprié, comparer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{t}} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{t}} dt . \text{ En déduire la valeur de } I .$$

Exercice 14

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose $I_{\alpha, \beta} = \int_0^{+\infty} \sin(\alpha t) e^{-\beta t} dt$.

1. Montrer que l'intégrale $I_{\alpha, \beta}$ converge.
2. Calculer $I_{\alpha, \beta}$.

Exercice 15

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$.
2. On pose pour $x > 0$: $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2} dt$.

Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $f'(x) = K e^{-ix^2}$.

3. On admet : $K = -\sqrt{\pi}$. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$. En déduire $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$.

Exercice 16

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) \cotan(t) dt$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$.

2. Calculer u_1 . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire la valeur de u_n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$
4. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 17

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de F .
2. Montrer que F est de classe C^2 sur un intervalle à préciser.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F , et en déduire F .

Exercice 18

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer f' .
2. Montrer que : $\forall x \geq 1, 0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
3. En déduire que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge, et calculer I .

Exercice 19

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t} t^n dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
2. On note ℓ sa limite. Montrer que $\ell = \frac{1}{2}$.

Exercice 20

Intégrales de Frullani

Soient f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et a, b deux réels strictement positifs.

1. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = [\ell - f(0)] \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
2. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 21

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+e^x} dx$.

Exercice 22

Montrer qu'il existe une constante C , que l'on déterminera, telle que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t/x)}{1+t^2} dt = - \int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2} dt.$$

Exercice 23

Soit f une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$, et F sa primitive s'annulant en 0.

Comparer les natures des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\operatorname{ch}(t)} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t) \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt$, et, en cas de convergence, comparer leurs valeurs.

Exercice 24

Existence et calcul de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$. On pensera à des changements de variables appropriés.

Exercice 25

1 Résoudre

$$\begin{cases} y' + 2\pi xy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On donne : $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2 Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n : t \mapsto t^n \exp(-\pi t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3 Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} b_0(t) dt$.

4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(t) dt$

Montrer que B_n est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5 Montrer que pour tout x , $B_0(x) = \exp(-\pi x^2)$.

6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in E$, où E est l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme $x \mapsto P(x) \exp(-\pi x^2)$, où P est un polynôme.

Exercice 26

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction de la variable réelle $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.
 2. Montrer que f est continue sur D_f .
 3. Étudier la dérivabilité de f sur D_f .
 4. Déterminer un équivalent simple de f quand $x \rightarrow +\infty$.
-

Exercice 27

Justifier l'existence pour $n \in \mathbb{N}^*$, et donner un équivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} \cos(x)}{\sqrt{x}} dx$.

Exercice 28

Calculer $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$. On utilisera un développement en série.

Exercice 29

Pour tout réel x , on pose : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t+x)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est impaire.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et calculer F' sur cet intervalle.

$$\text{On pourra utiliser pour : } x \neq 0 : \frac{1}{(1+t^2)(1+(t+x)^2)} = \frac{1}{x(x^2+4)} \left[\frac{-2t+x}{t^2+1} + \frac{2(t+x)+x}{1+(t+x)^2} \right].$$

3. En déduire une formule explicite pour la fonction F .
-

Exercice 30

Déterminer les fonctions $f \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$, telles que f et f^2 sont intégrables sur $]0, 1]$ et vérifient :

$$\forall x > 0, \frac{1}{2} \int_0^x f^2(t) dt = \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2.$$

Indication : si f est une telle fonction, on montrera que $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ appartient à $C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$, et on cherchera une équation différentielle vérifiée par f .

Exercice 31

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules : $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 u}} du$.

a. Montrer que la fonction $f^2 + g$ est constante (poser $t = \tan u$ dans l'intégrale définissant $g(x)$ pourra s'avérer utile).

b. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 32

Soit $\phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer l'existence de $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \frac{K}{1+x^2}$.
3. Montrer que ϕ est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$; exprimer ϕ' à l'aide d'une intégrale, et en déduire ϕ .

Exercice 33

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Préciser le domaine de définition de F .
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F' .
3. En déduire F .

Exercice 34

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\text{sh}(\alpha) = 1$.
2. Montrer que $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^\alpha \text{sh}^n(t) dt$. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
4. Calculer I_0 et I_1 .
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} + nI_n = \sqrt{2}$.
6. Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.