



Liste d'exercices

Endomorphismes des espaces euclidiens

Exercice 1

Soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = C^T C$. Déterminer $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien.

- Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs normés. Calculer $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle$.
- On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude si $f = k u$ pour un certain $k \geq 0$ et un certain $u \in \mathcal{O}(E)$.

Montrer que f est une similitude si et seulement si f conserve l'orthogonalité.

Exercice 3

Soit $n \geq 2$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Calculer $\langle AX | X \rangle$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Montrer que : $\left| \sum_{(i,j) \in 1,n^2} a_{i,j} \right| \leq n$.

- Montrer aussi que : $n \leq \sum_{(i,j) \in 1,n^2} |a_{i,j}|$.

- Montrer enfin que : $\sum_{(i,j) \in 1,n^2} |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 4

Soient $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- Déterminer la nature de la transformation exercée par u .
- Diagonaliser A .

Exercice 5

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant : $(\Sigma) : \begin{cases} M^2 + 4I_2 = O_2 \\ M^T M = M M^T \end{cases}$.

Q1_ Montrer que $\frac{M}{2} \in O_2(\mathbb{R})$, i.e. que $\frac{M}{2}$ est une matrice orthogonale.

Q2_ En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ solutions de (Σ) .

Exercice 6

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que le spectre complexe de M est inclus dans $i\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p , et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est supposé muni de son produit scalaire canonique, notée $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associée.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\|AX_0 - B\| = \min \{ \|AX - B\|, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}.$$

2. Montrer que l'équation matricielle (d'inconnue X) : $A^T A X = A^T B$

admet une unique solution, que l'on comparera à X_0 .

3. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose : $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (x+y-2)^2 + z^2$.

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$, et le déterminer.

Exercice 8

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme symétrique positif de E (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont positives).

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique positif g de E tel que $g \circ g = f$.

2. Montrer que cet endomorphisme (symétrique, positif) est unique.

Cet endomorphisme est noté $\sqrt{f}$, et il est appelé racine carrée de f .

Exercice 9

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique, d'une matrice symétrique positive.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = A A^T$. Prouver l'existence d'une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = B$.

3. La matrice R est-elle unique ?

Exercice 10

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On suppose que F et G sont supplémentaires dans E . Montrer que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 11

Endomorphismes antisymétriques

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et f un endomorphisme de E .

1. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

- $\forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle = 0$.

•• $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = -\langle x | f(y) \rangle.$

••• La matrice de f dans une base orthonormée de E est antisymétrique.

Un endomorphisme vérifiant l'une des deux assertions ci-dessus est dit **antisymétrique**.

2. Soit $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E .

Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un s-e.v. de $\mathcal{L}(E)$, et déterminer sa dimension.

3. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E . Montrer que $\text{Ker } f \overset{\perp}{\oplus} \text{Im } f = E$.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien. Soit un endomorphisme bijectif f de E tel que pour tous x, y de E : $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

On pose $s = f \circ f$.

1. Montrer que s est un endomorphisme symétrique. Soit λ valeur propre de s et x vecteur propre associé.

2.a. Montrer que x et $f(x)$ sont orthogonaux.

b. Montrer que $\langle s(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$. En déduire que $\lambda < 0$.

3. On note F le sous-espace vectoriel engendré par x et $f(x)$.

a. Montrer que F et $F^\perp$ sont stables par f .

b. On note l'endomorphisme induit par f sur F . Montrer que sa matrice dans une base C s'écrit

sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, où on exprimera a en fonction de λ .

4. On admet provisoirement qu'il existe des vecteurs propres $x_1, \dots, x_n$ de s de tels que

$(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \dots, x_n, f(x_n))$ soit une base de E .

Montrer que la dimension de E est paire. Que dire de la matrice de f dans la base ci-dessus ?

5. Prouver le résultat admis en question 4.

Exercice 13

Soient A un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, et F l'application qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne

de P par A . On note enfin Φ :

$$\left(\begin{array}{l} (\mathbb{R}[X])^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}} dt \end{array} \right).$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que F est un projecteur.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on note f la restriction de F à $\mathbb{R}_n[X]$.

A quelle condition f est-il un projecteur orthogonal ?

Exercice 14

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soient $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 15

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. On pose pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$\varphi(x) = x - (x_1 + x_2 + x_3)v$. Montrer que φ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, déterminer son noyau et son image.

Exercice 16

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \text{Tr}(A^T B)$.

1. Montrer que ceci définit un produit scalaire.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur le sous-espace des matrices symétriques.

Exercice 17

Soient $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $V = \{f \in E, f'' = f\}$, $W = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et

$H = \{f \in E, f(0) = \text{ch}(1), f(1) = 1\}$. On pose $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

1. Montrer que la famille (ch, sh) est libre. Quelle est la dimension de V ? Montrer que (ch, sh) est une base de V .
2. Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. En déduire $\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle, \|\text{ch}\|^2, \|\text{sh}\|^2$.

Soient $f \in V, g \in E$. Montrer que $\langle f, g \rangle = 0$. On admet alors provisoirement que $W = V^\perp$.

3. Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \text{ch} \rangle, \langle f, \text{sh} \rangle$. Donner $\pi_V(f)$ dans la base $\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle$. Calculer $\|\pi_V(f)\|^2$.

4. Calculer $\inf \left\{ \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t)) dt, f \in H \right\}$.

5. Montrer que $W = V^\perp$.

Exercice 18

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et f un endomorphisme orthogonal de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)^\perp \oplus \text{Im}(f - \text{Id}_E) = E$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$, et l'on désigne par f_∞ la projection orthogonale de E sur $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

En utilisant la décomposition obtenue à la question précédente, montrer que : $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$.

Exercice 19

1. Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ euclidien de matrice dans la base canonique $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$?

On précisera ses éléments caractéristiques.

2. Même question avec $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercice 20

1. Diagonaliser : $S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Déterminer le commutant et l'anticommutant de l'endomorphisme f canoniquement associé à S .

Ces deux sous – espaces sont – ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 21

Trouver les matrices $A \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 + A^2 + A = 0$.

Exercice 22

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
 Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 23

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

1. Déterminer un polynôme annulateur μ de la matrice A aussi simple que possible.

2. Justifier que A est diagonalisable, et déterminer ses sous – espaces propres.

Construire une matrice de passage à une base diagonalisante, désormais notée P .

3. On note (u, v, w) les transposés respectifs des vecteurs colonnes de la matrice P .

Appliquer à la famille (u, v, w) l'algorithme de Gram – Schmidt.

En déduire une nouvelle matrice de passage, désormais notée Q .

4. Montrer que Q est orthogonale. Achever alors la diagonalisation de la matrice A .

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n en fonction de n .

Exercice 24

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Diagonaliser A dans le groupe orthogonal.

Exercice 25

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = {}^t A A$ et $\lambda = \max(\text{Sp}(B))$.

1. Montrer que $\lambda \geq 0$.

2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|A X\| \leq \sqrt{\lambda} \|X\|$. Cas d'égalité ?

3. Application avec $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

Exercice 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{2025} = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^T A$.

On suppose que A est nilpotente. Montrer que A est la matrice nulle.

Exercice 28

Quotients de Rayleigh

1. Question principale, à savoir traiter

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $\text{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que :

$$\min \left\{ \frac{X^T \cdot M \cdot X}{X^T \cdot X}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\} \right\} = \min(\text{Sp}(M)),$$

$$\text{et} \quad \min \left\{ \frac{X^T \cdot M \cdot X}{X^T \cdot X}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\} \right\} = \min(\text{Sp}(M)).$$

2. Application plus optionnelle

$$\text{Déterminer : } \max \left\{ \frac{2x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 8xy + 2xz}{x^2 + y^2 + z^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \right\}.$$

Exercice 29

1. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, et A sa matrice

$$\text{dans une base orthonormée } \mathcal{B} \text{ de } E : A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Montrer que } f = -3p_1 + p_2 + 6p_3, \text{ où :}$$

$$\circ \quad p_1 + p_2 + p_3 = \text{Id}_E,$$

$$\circ \circ \quad \text{Pour tout } (i, j) \in \{1, 3\}^2, i \neq j : p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)},$$

$$\circ \circ \circ \quad \text{Pour } i \in \{1, 3\}, p_i \text{ est le projecteur orthogonal sur un sous-espace propre de } f.$$

2. Dans cette question, f désigne un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E quelconque.

a. Montrer que $f = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda p_\lambda$, où p_λ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre E_λ .

Remarque C'est la décomposition de f à l'aide des projecteurs spectraux.

b. Montrer que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda^k p_\lambda$.

3. On considère à nouveau l'endomorphisme f et la matrice A de la première question. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

Exercice 30

Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** lorsqu'elle est symétrique, et que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle AX | X \rangle \geq 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si, et seulement si, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice positive, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé canoniquement. Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on note p_λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$.

a. Justifier les propriétés suivantes :

$$\bullet \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \text{Sp}(A)^2, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}.$$

$$\bullet \bullet \quad \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} p_\lambda = \text{Id}.$$

b. Montrer que l'endomorphisme $v = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$ vérifie : $v \circ v = u$.

En déduire que la matrice R canoniquement associée à v vérifie $R^2 = A$.

c. Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive telle que $Y^2 = A$, et w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

$$\bullet \quad \text{Montrer que : } \text{Sp}(Y) \subset \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

$$\bullet \bullet \quad \text{Soit } \lambda \in \text{Sp}(A). \text{ Montrer que } F_{\sqrt{\lambda}} = \text{Ker}(Y - \sqrt{\lambda} \text{Id}) \subset E_\lambda.$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad \text{Montrer alors que } \text{Sp}(Y) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(A)\}, \text{ et que : } \forall \lambda \in \text{Sp}(A), F_{\sqrt{\lambda}} = E_\lambda.$$

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \quad \text{En déduire que } w = v, \text{ puis qu'il existe une unique matrice positive } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ solution de l'équation } X^2 = A, \text{ notée } \sqrt{A}.$$

d. Montrer que $\sqrt{A}$ commute avec A .

Exercice 31

Recherche de sous-espaces stables par un endomorphisme

1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E .

Montrer que tout sous-espace propre de f est f -stable. La réciproque est-elle vraie ?

Que dire d'un sous-espace vectoriel f -stable et qui est de dimension 1 ?

2. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, et g l'endomorphisme de matrice A^T dans la base $\mathcal{B}$.

$$\text{a. Montrer que : } \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | g(y) \rangle.$$

b. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est f -stable ssi l'orthogonal $F^\perp$ de F est g -stable.

3. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

Déterminer l'orthogonal du plan $\mathcal{P}$ d'équation : $ax + by + cz = 0$.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les éléments (valeurs et vecteurs) propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b. En les classant selon leur dimension, déterminer tous les sous-ev. F de $\mathbb{R}^3$ qui soient f -stables.

c. Montrer que l'un des plans stables obtenus est $\text{Ker}\left((f - 3\text{Id}_E)^2\right)$. Quel est l'autre ?

Exercice 32

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension p . On définit le **déterminant de Gram** d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n

vecteurs de E par :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det \left(\left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \right).$$

1. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

2. Soit $F \neq \{0\}$ un sev non stupide de E , muni d'une base $(x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $x \in E$, prouver que :

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

Exercice 33

- Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E . Montrer que $p \circ q = 0$ si et seulement si $q \circ p = 0$.
- Comment peut être la matrice de tels endomorphismes dans une base adaptée ? Dans quelle base ?

Exercice 34

1. Soit p un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que :

$$p^2 = p \text{ et } p \text{ symétrique} \Leftrightarrow p \text{ est un projecteur orthogonal.}$$

Soient p, q deux projecteurs orthogonaux. On pose $u = p - q$

2. Montrer que u est diagonalisable.

3. Montrer que $\text{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.

4.* Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 35

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que A est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice orthogonale P , $P^{-1}AP$ est de diagonale nulle.

Exercice 36

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et f un endomorphisme de E .

Montrer que deux des conditions ci-dessous impliquent toujours la troisième :

i – f est une transformation orthogonale ;

ii – $f^2 = Id$;

iii – Pour tout $x \in E$, $\langle f(x) | x \rangle = 0$.

Exercice 37

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $(a, b) \in (E \setminus \{0\})^2$. On pose $f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x - (a | x) b \end{cases}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f soit inversible, et donner alors son inverse.

Exercice 38

Partie I

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2a+1 & -a \\ 4a & 4a & -2a+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(M_a)$. En déduire que f_a est bijective.
2. Déterminer les valeurs propres de f_a , et les vecteurs propres associés. f_a est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $\text{Ker}(f_a - \text{Id})$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et que $\text{Im}(f_a - \text{Id})$ est inclus dans $\text{Ker}(f_a - \text{Id})$.

Partie II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, soient u et v deux vecteurs non nuls de E . On définit l'application f qui à tout vecteur x de E associe $x + \langle x | v \rangle u$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est de dimension $n - 1$, et déterminer $\text{Im}(f - \text{Id})$.
3. Déterminer les valeurs propres de f , et les vecteurs propres associés. f est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id})$ est inclus dans $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

$$5. \text{ Montrer que la matrice de } f \text{ dans une certaine base peut s'écrire : } M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & 1 & & (0) \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On appelle transvection de E tout endomorphisme g de E vérifiant les deux conditions :
 - $\text{Im}(g - \text{Id})$ est inclus dans $\text{Ker}(g - \text{Id})$ et
 - $\text{Ker}(g - \text{Id})$ est de dimension $n - 1$.

Montrer que toute transvection de E admet une représentation matricielle de la forme précédente.

Exercice 39

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .

1. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels, démontrer l'inégalité suivante (inégalité d'Hadamard) :
 $|\det A| \leq \|C_1\| \cdot \|C_2\| \cdots \|C_n\|$. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Lorsque A est inversible, montrer que l'inégalité d'Hadamard est une égalité si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.

Exercice 40

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , u un vecteur unitaire de E , et U la matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

On note $A = U U^T$, et f l'endomorphisme de E de matrice u dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .
2. Déterminer l'image et le noyau de f .

Exercice 41

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ symétrique réelle d'ordre n , de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Exercice 42

Soient A une matrice symétrique réelle, et $B = A + i I_n$.

1. Montrer que B est inversible.
 2. Peut-on généraliser ce résultat aux matrices réelles non symétriques ?
-

Exercice 43

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^T A = A A^T$. Montrer que $A = 0$.
 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que $A^n = 0$.
 3. Soit $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^3 \end{pmatrix}$. L'application φ est-elle surjective ?
-

Exercice 44

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$.

En déduire que, si A est triangulaire supérieure, alors elle est diagonale.

Exercice 45

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On se donne les deux intégrales : $I_1 = \int_0^1 f(t) f'(t) \cotan(\pi t) dt$

et $I_2 = \int_0^1 f^2(t) (1 + \cotan^2(\pi t)) dt$.

1. Montrer que ces intégrales convergent, et donner une relation entre elles.
 2. Montrer que : $I_1 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.
-

Exercice 46

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $X^T A X \leq X^T B X$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det A \leq \det B$.

Exercice 47

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par : $a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i x_j$ ($\delta_{i,j}$: symbole de Kronecker).

Montrer que A est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 48

On note $A = \left(\frac{1}{i+j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Que peut-on dire de l'application $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \mapsto X^T A Y \end{pmatrix}$?

Exercice 49

Soient u, v deux endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

1. Montrer que $\det(u + v) \geq \det(u) + \det(v)$.
2. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 50

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme symétrique de E , de trace nulle. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle tous les coefficients diagonaux de la matrice de f sont nuls.

Exercice 51

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une transformation orthogonale de E .

Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale par blocs du type :

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & & & \vdots \\ \vdots & 0 & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix},$$

où $p, q, r \in \mathbb{N}$, et où, pour tout réel θ , on a posé : $R(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Exercice 52

1. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive (respectivement symétrique définie positive), alors il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive (respectivement symétrique définie positive), telle que $B = R^2$ (une telle matrice R est en fait unique, mais on ne demande pas de le prouver).

Soient désormais deux matrices symétriques $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. On suppose B positive. Montrer que AB n'est pas nécessairement diagonalisable (on pourra chercher un contre-exemple, par exemple en dimension 2).
3. On suppose B définie positive. Montrer que AB est diagonalisable.