



2025-2026

PC

Liste d'exercices

Espaces vectoriels normés

Exercice 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2, \|x - y\| \geq \frac{1}{2}(\max(\|x\|, \|y\|)) \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$.
2. La constante $\frac{1}{2}$ peut-elle être améliorée ?

Exercice 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, normé, avec $E \neq \{0\}$. Considérons deux boules ouvertes $B(a, r)$ et $B(a', r')$, où $(a, a') \in E^2$ et $(r, r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On suppose que $B(a, r) = B(a', r')$.

Montrer que $a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 3

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \int_0^1 |tx + y| dt$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. En représenter la boule unité fermée.

Exercice 4

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{|x + ty|}{1 + x^2} \right)$.

On note également $\|\cdot\|_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + |x|}{2}$.
2. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\|(x, y)\|_2}{2} \leq \|(x, y)\| \leq \|(x, y)\|_2$, et que cet encadrement est le meilleur valable.
4. Représenter la boule unité pour la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 5 *

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et p un réel strictement supérieur à 1. On pose $q = \frac{p}{p-1}$.

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes arbitraires.

1. Etablir l'*inégalité de Hölder* :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra utiliser la convexité de la fonction $-\ln$

2. Prouver l'*inégalité de Minkowski*

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. En déduire que $\| \cdot \|_p : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{C}^p$.

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 = \frac{1}{3}(A^2 + A + I_3)$.

Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur.

Exercice 7

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit, pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|.$$

Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur E .

Exercice 8

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ et nulles en 0.

1. On pose, pour tout $f \in E$, $\mathcal{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E .

2. Montrer que $\mathcal{N}$ n'est équivalente, ni à $\| \cdot \|_\infty$, ni à $\| \cdot \|$, ni à $\| \cdot \|_2$.

3. On définit sur E une nouvelle norme $\mathcal{N}'$ par $\mathcal{N}'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que $\mathcal{N}'$ est équivalente à $\mathcal{N}$.

On pourra prouver que pour tout $f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$.

Exercice 9

L'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, est muni de la norme

$$\| \cdot \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On considère l'ensemble $A = \left\{ f \in E, \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| < 1 \right\}$.

Montrer que A n'est pas un fermé au sens de la norme $\| \cdot \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$.

Et pourtant, A est la boule unité ouverte pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Exercice 10

Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre.

- a. $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.
- b. $B = \{ z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2 \}$ dans $(\mathbb{C}, | \cdot |)$.
- c. $C = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right), x \in \mathbb{R}^* \right\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$.
- d. $D = C \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$.
- e. $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 \leq |x| \}$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$.

Exercice 11

Soient A et B deux ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme $\| \cdot \|$ quelconque). On définit

$$A + B = \{ a + b, a \in A, b \in B \}.$$

- 1. Montrer que si A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $A + B$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
- 2. Montrer que si A et B sont bornées, $A + B$ est bornée.
- 3. Montrer que si A et B sont fermés dans $\mathbb{R}^n$, $A + B$ ne l'est pas nécessairement.

On pourra considérer, dans $\mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ et $B = \sqrt{2} \mathbb{Z}$.

Exercice 12

Soit $\| \cdot \| : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \max(|x+y|, |2x|, |x-y|) \end{pmatrix}$.

Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et représenter sa boule unité (fermée).

Exercice 13

$E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence en moyenne. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$f_n : t \mapsto \sqrt{n} t^n$. Montrer que (f_n) converge vers 0, mais que $(f_n \times f_n)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 14

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace normé $(E, \| \cdot \|)$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F .

- 1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2. On suppose que $\overline{F}$ contient une boule ouverte. Montrer que $\overline{F} = E$.

3. On suppose que F est de dimension finie. Montrer que $F = \overline{F}$.

4. On suppose que F est un hyperplan. Montrer que F est, soit fermé, soit dense dans E .

Une partie A de E est dite dense dans E lorsque tout point de E est limitée d'une suite d'éléments de A .

Exercice 15

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension finie, et soit A une partie compacte (= fermée bornée) de A .

Soit $f: A \rightarrow A$ telle que : $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

Montrer que f admet un unique point fixe dans A .

Exercice 16

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et A une partie non vide de E .

Pour tout $x \in E$, on pose $d(A, x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Montrer que $x \mapsto d(A, x)$ est bien définie, et qu'elle est continue.

2. On suppose que A est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un vecteur $a \in A$ tel que $d(A, x) = \|x - a\|$.

Ce vecteur est-il nécessairement unique ?

3. Dans cette question, E est l'espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées, muni de la norme

$\|\cdot\|_\infty : u = (u_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|)$. A est le sous-espace vectoriel de E formé des suites

convergentes. Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.

Déterminer $d(A, u)$. Cette distance est-elle atteinte ?

4. Dans cette question, E est l'espace vectoriel $C^0_{mx}([-1, 1], \mathbb{R})$ (fonctions continues par morceaux),

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x \in [-1, 1]} (|f(x)|)$. A est le sous-espace vectoriel $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ de

E formé des fonctions continues, et f est la fonction :

$$f : \begin{cases} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases} \end{cases}.$$

Déterminer $d(A, u)$. Cette distance est-elle atteinte ?

Exercice 17

Une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite multiplicative lorsque pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A) \mathcal{N}(B).$$

1. Montrer que $\mathcal{N} : (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ définit une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{N}(A) = \max_{\{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_\infty = 1\}} \|AX\|_\infty$.

Exercice 18

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et u un endomorphisme de E vérifiant :

$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que $\text{Im}(u - \text{Id})$ et $\text{Ker}(u - \text{Id})$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 19

On définit, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, la suite $(z_n)_{n \geq 0} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}_{n \geq 0}$ par :

$$z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n - 61 \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{3}w_n + 61 \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3}w_n + 61 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de la forme $z_{n+1} = Az_n + B$, à préciser.
2. Montrer que l'équation $L = AL + B$ ($L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) admet une unique solution.
3. Montrer que, pour cette solution L , la suite $(z_n - L)_{n \geq 0}$ est géométrique.
4. Que peut-on en déduire quant à la convergence de $(z_n)_{n \geq 0}$?

Exercice 20

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n$.

Exercice 21

On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\| : M \mapsto \max_{1 \leq i,j \leq p} |m_{i,j}|$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$. Montrer que $\varphi : M \mapsto MX$ et $\psi : M \mapsto P^{-1}MP$ sont des applications continues.
2. Montrer que $\Theta : (M, N) \mapsto MN$ est continue de $(\mathcal{M}_p(\mathbb{C}))^2$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B .

Montrer que B est une matrice de projecteur.

Exercice 22

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (A B)^p = O_n$ (matrice nulle).

Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (B A)^p = O_n$.

Exercice 23

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles. On munit E de la norme :

$$\| \cdot \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On considère la forme linéaire $L : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(1) \end{cases}$. Montrer que L n'est pas continue.

On pourra considérer les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n+1} x^n$.

Exercice 24

1. Soient U et V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé E . Montrer que $\overset{\circ}{U}$ et $\overset{\circ}{V}$ sont disjoints.
2. Ce résultat reste-t-il exact si l'on ne suppose plus U et V ouverts ?

Exercice 25

On note E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Pour $f \in E$, on définit

l'ensemble $L(f)$ par $L(f) = \{k \geq 0, \forall (x, y) \in E^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$.

On pose alors $\mathcal{N}(f) = \inf(L(f))$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, que $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie, et que c'est une norme sur E .
2. Montrer que $\mathcal{N}$ domine $\| \cdot \|_\infty$.

3. En considérant les fonctions $f_n : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 - \sqrt{1-t} & \text{si } t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$,

montrer que les normes $\mathcal{N}$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 26

Cet exercice a pour but de démontrer le théorème de Cayley – Hamilton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1.a. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_D(D) = 0$.

1.b. Soit maintenant M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_M(M) = 0$.

2. On note $DZ_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $DZ_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pourra montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices ayant n valeurs propres distinctes.

3.a. Montrer que l'application $\chi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ M \mapsto \chi_M \end{cases}$ est continue.

3.b. Montrer que l'application $\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto \chi_M(M) \end{cases}$ est nulle.

4. Conclure.

Exercice 27

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que : $A^3 = \frac{1}{3}(A^2 + A + I_n)$.

Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur.

2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E . Montrer que $\mathcal{P}$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$. $\mathcal{P}$ est-il un ouvert de $\mathcal{L}(E)$?

Exercice 28

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B}$ une boule fermée non vide de E . On considère une application $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

1. Montrer que si $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{B}$, alors g admet un minimum.

2. On suppose dans cette question que f vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathcal{B}$, ie il existe un unique $\alpha \in \mathcal{B}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

3. On suppose maintenant que f est 1-lipchitzienne sur $\mathcal{B}$. Montrer que f admet un point fixe dans $\mathcal{B}$.

Exercice 29

Dans cet exercice, E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, et f une application continue de E dans F .

1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E , et soit ℓ sa limite. Montrer que $K = u(\mathbb{N}) \cup \{\ell\}$ est un fermé donné de E .

2. On dit que f est *fermée* si l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F . On dit que f est *propre* si l'image réciproque de toute partie fermée bornée de F est un fermé borné de E .

a. Montrer que si f propre, alors f est fermée.

b. Montrer que f est une application propre si et seulement si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

3. Montrer que si f est fermée et injective, alors f est propre.

Problème

Les espaces vectoriels considérés sont réels.

- Soit E un espace vectoriel. Si $(a, b) \in E^2$, on appelle segment d'extrémités a et b , et l'on note $[a, b]$, l'ensemble des vecteurs $ta + (1 - t)b$ lorsque t décrit $[0, 1]$.
- Soit A une partie de E . On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$.
- Une partie A de E est dite convexe si : $\forall (a, b) \in A^2, [a, b] \subset A$.
- Une partie A de E est dite symétrique si : $\forall x \in A, -x \in A$.
- Soit A une partie convexe de E , a un élément de A . On dit que a est extrémal dans A si la partie $A \setminus \{a\}$ est convexe.

On note $\mathcal{E}(A)$ l'ensemble des éléments extrémaux de A .

- Si $(E, \mathcal{N})$ est un espace vectoriel normé, on notera $B_{\mathcal{N}} = \{x \in E, \mathcal{N}(x) \leq 1\}$ la boule unité fermée de $(E, \mathcal{N})$ et $S_{\mathcal{N}} = \{x \in E, \mathcal{N}(x) = 1\}$ la sphère unité de $(E, \mathcal{N})$.

A. Quelques propriétés élémentaires d'une boule unité fermée

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $B_{\mathcal{N}}$ est un convexe de E .

On suppose dans les deux questions qui suivent que E est de dimension finie.

2. Montrer que $B_{\mathcal{N}}$ est un fermé de E .
3. Montrer que l'intérieur de $B_{\mathcal{N}}$ est $B_{O, \mathcal{N}} = \{x \in E, \mathcal{N}(x) < 1\}$.

B. Une caractérisation des points extrémaux

Soient E un espace vectoriel, A une partie convexe de E , a un élément de A .

On dit que a possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\forall (a_1, a_2) \in A^2, a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

4. Montrer que si $a \in \mathcal{E}(A)$, alors a possède la propriété $\mathcal{P}$.
5. Montrer que $a \notin \mathcal{E}(A)$ si et seulement si : $\exists (a_1, a_2) \in A^2, a_1 \neq a_2$ et $\exists t \in]0, 1[, a = ta_1 + (1 - t)a_2$.
6. En déduire que a appartient à $\mathcal{E}(A)$ si et seulement si a possède la propriété $\mathcal{P}$.

C. Points extrémaux d'une boule unité fermée

7. Montrer que $\mathcal{E}(B_{\mathcal{N}})$ est inclus dans $S_{\mathcal{N}}$.
8. Soient a_1, a_2 deux points de $B_{\mathcal{N}}$, distincts. Montrer que si $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \in S_{\mathcal{N}}$, alors a_1 et a_2 appartiennent à $S_{\mathcal{N}}$.
9. En déduire l'équivalence
 $\mathcal{E}(B_{\mathcal{N}}) \neq S_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in A^2, a \neq b, \text{ tel que } [a, b] \subset S_{\mathcal{N}}$.

10. Donner un exemple simple où $\mathcal{E}(B_{\mathcal{N}}) \neq S_{\mathcal{N}}$.

D. Une caractérisation des boules unités fermées en dimension finie

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ que l'on munit de la norme euclidienne canonique $\| \cdot \|$, définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Soit C une partie fermée, bornée, convexe, d'intérieur non vide et symétrique de E .

11. Montrer que $0 \in \overset{\circ}{C}$.

12. Soit $x \in E$. Dédurre de la question précédente que l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \lambda C\} \text{ est non vide. On pose alors, pour tout } x \in E : j_C(x) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \lambda C\}.$$

13. Montrer que j_C est une norme sur E .

14. On note $B_{j_C} = \{x \in E, j_C(x) \leq 1\}$ la boule unité de E pour la norme j_C .

Montrer que $\overset{\circ}{B_{j_C}} \subset C \subset B_{j_C}$. En déduire que $B_{j_C} = C$.

15. Conclure qu'une partie de E est la boule unité fermée pour une norme sur E si et seulement si c'est une partie symétrique, fermée, convexe bornée, d'intérieur non vide de E .