



2025-2026

PC

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels normés

1. Norme, espace vectoriel normé

a. Normes

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

On appelle **norme** sur E toute application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i – Positivité

Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$.

ii – Séparation

Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii – Homogénéité

Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

iv – Inégalité triangulaire

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Notations, et définitions satellites

- Les notations les plus courantes pour les normes sont $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$.
- Lorsque $\mathcal{N}$ est une norme sur l'espace vectoriel E , le couple $(E, \mathcal{N})$ est appelé **espace vectoriel normé**.
- S'il n'y a pas ambiguïté quant à la norme considérée, on pourra dire plus succinctement que E est un espace vectoriel normé.

b. Premiers exemples : normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur différents espaces

i – Sur $\mathbb{K}^n$

On définit sur $\mathbb{K}^n$ les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ par :

$$\| \cdot \|_1 : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^n |x_k| \end{array} \right), \quad \| \cdot \|_2 : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \end{array} \right),$$

$$\text{et } \| \cdot \|_\infty : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |x_k| \end{array} \right).$$

ii – Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On définit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : & \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{i,j})_{(i,j) \in 1,n \times 1,p} & \mapsto \boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|} \end{cases}, \\ \|\cdot\|_2 : & \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{i,j})_{(i,j) \in 1,n \times 1,p} & \mapsto \boxed{\sqrt{\text{Tr} \left({}^t \overline{A} \cdot A \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2}} \end{cases}, \\ \text{et } \|\cdot\|_\infty : & \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{i,j})_{(i,j) \in 1,n \times 1,p} & \mapsto \boxed{\max_{\substack{i \in 1,n \\ j \in 1,p}} |a_{i,j}|} \end{cases} \end{aligned}$$

iii – Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (non vide, non réduit à un point).

- **Sur l'espace vectoriel $C_b^0(I, \mathbb{K})$** des fonctions continues et bornées sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$:

On définit la norme $\|\cdot\|_\infty$, ou norme de la convergence uniforme, par :

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} C_b^0(I, \mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \boxed{\sup_{t \in I} |f(t)|} \end{cases}$$

- **Sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$** des fonctions continues et intégrables sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$:

On définit la norme $\|\cdot\|_1$, ou norme de la convergence en moyenne, par :

$$\|\cdot\|_1 : \begin{cases} \mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \boxed{\int_I |f(t)| dt} \end{cases}$$

- **Sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$** des fonctions continues et de carré intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$:

On définit la norme $\|\cdot\|_2$, ou norme de la convergence en moyenne, par :

$$\|\cdot\|_2 : \begin{cases} \mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \boxed{\sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}} \end{cases}$$

Seule l'inégalité triangulaire dans le cas des normes $\|\cdot\|_2$ mérite une réelle démonstration :

c. Preuve de l'inégalité triangulaire dans le cas d'une norme $\|\cdot\|_2$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et dans les trois exemples donnés ci-dessus, $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à un produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ sur } \mathbb{R}^n, \langle A, B \rangle \mapsto \text{tr}({}^t A B) \text{ sur } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \langle f, g \rangle \mapsto \int_a^b f(t) g(t) dt \text{ sur } C^0([a, b], \mathbb{R}).$$

On a vu en première année que ces trois normes vérifient l'inégalité de Cauchy – Schwarz, et que l'inégalité triangulaire en découle ; rappelons – en la démonstration sur l'un des exemples mis en jeu, et étendons – là au cas complexe. Vérifier que vous savez adapter ladite démonstration à l'un des autres espaces vectoriels est un bon exercice.

On pose : $\forall \langle x, y \rangle \in (\mathbb{C}^n)^2, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$.

Proposition

- On a l'inégalité de Cauchy – Schwarz : $\forall (x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$.
- On en déduit l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2, \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

Preuve de l'inégalité de Cauchy – Schwarz

Lorsque $x = 0$, le résultat est une évidence ; supposons désormais x non nul, et considérons l'application $P : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \lambda \mapsto \|\lambda x + y\|_2^2 \end{cases}$.

Ensuite, *fût distinguer* :

Dans le cas réel

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$, puis en développant par bilinéarité, il vient

$P(\lambda) = \lambda^2 \|x\|_2^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|_2^2$: P est une fonction polynomiale de degré 2. Puisqu'elle est de signe constant, son

discriminant est négatif : $4(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|_2^2 \|y\|_2^2) \leq 0$, et ceci prouve l'inégalité de Cauchy – Schwarz.

Dans le cas complexe

$P(\lambda) = \|x\|_2^2 \left(\lambda \bar{\lambda} + \frac{\bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle}}{\|x\|_2^2} \right) + \|y\|_2^2$, et l'on met cette expression sous un ersatz de forme canonique :

$$P(\lambda) = \|x\|_2^2 \left[\left(\lambda + \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2^2} \right) \overline{\left(\lambda + \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2^2} \right)} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|_2^4} \right] + \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 \left| \lambda + \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2^2} \right|^2 + \frac{\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - |\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|_2^2}.$$

En particulier, pour $\lambda_0 = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2^2}$, il vient $0 \leq P(\lambda_0) = \frac{\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - |\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|_2^2}$; l'inégalité de Cauchy – Schwarz s'ensuit.

Preuve de l'inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2, \|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \|y\|_2^2 \\ \leq \|x\|_2^2 + 2|\langle x | y \rangle| + \|y\|_2^2 \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K},$$

$$\text{puis } \|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy – Schwarz} \\ = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

d'où l'inégalité triangulaire.

d. Une propriété

Proposition (deuxième inégalité triangulaire)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Preuve

On doit montrer que $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ et que $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Quitte à échanger les rôles de x et de y , il suffit de prouver la première de ces deux inégalités. Or l'inégalité triangulaire assure que $\|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$. On tient donc le résultat.

2. Distance associée à une norme

Définition (distance associée à une norme)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$

sur E l'application
$$d : \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{cases}.$$

Proposition (propriétés fondamentales des distances)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E . Alors :

i – Positivité

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geq 0$.

ii – Séparation

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii – Symétrie

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$.

iv – Inégalité triangulaire

Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

3. Un peu de topologie, et notions connexes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

a. Boules dans un espace vectoriel normé

Définition (boules ouvertes, boules fermées)

Etant donné un élément a de E et un réel r :

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B_O(a, r) = \{x \in E, d(x, a) < r\} = \{x \in E, \|x - a\| < r\}.$$

- De même, la boule fermée de centre a et de rayon r est définie par :

$$B_F(a, r) = \{x \in E, d(x, a) \leq r\} = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}.$$

- La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in E, d(x, a) = r\} = \{x \in E, \|x - a\| = r\}.$$

- La boule unité ouverte est la boule ouverte de centre 0_E et de rayon 1.

On définit de manière analogue la boule unité fermée, et la sphère unité.

Exemple

Représenter les boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\| \cdot \|_1 : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto |x| + |y| \end{array} \right)$, $\| \cdot \|_2 : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right)$, et

$$\| \cdot \|_\infty : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|) \end{array} \right).$$

b. Parties bornées, parties convexes d'un espace vectoriel normé

Définition (parties bornées, parties convexes)

Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, et A une partie de E .

- On dit que A est **bornée** pour la norme $\| \cdot \|$ lorsque A est incluse dans une boule (ouverte ou fermée), ie. lorsque : $\exists a \in E, \exists r \in \mathbb{R}, A \subset B_F(a, r)$,
ou encore lorsque : $\exists a \in E, \exists r \in \mathbb{R}, \forall x \in A, d(a, x) \leq r$.

- L'ensemble A est dit **convexe** lorsque, pour tous points x et y de A , le segment $[xy]$ est inclus dans A , c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Remarques

- Toute boule (ouverte ou fermée) est à la fois bornée et convexe.
- La notion de parties bornées dépend de la norme choisie : en dimension infinie, une partie A de E peut être bornée pour une norme $\mathcal{N}_1$, mais ne pas l'être pour une norme $\mathcal{N}_2$. En revanche, que A soit convexe ou non ne dépend pas de la notion de norme.

c. Ouverts, fermés

Définition 1 (ouverts)

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, et soit A une partie de E .

On dit que A est un ouvert pour la norme $\| \cdot \|$ lorsque, pour tout élément a de A , il existe une boule ouverte non vide, centrée en a et incluse dans A . Ainsi, A est un ouvert de E pour la norme $\| \cdot \|$ lorsque

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subset A,$$

ou encore lorsque : $\forall a \in A, \exists r > 0, \forall x \in E, d(a, x) < r \Rightarrow x \in A$.

Par exemple, toute boule ouverte est un ouvert de E .

Proposition 1 (réunion quelconque, intersection finie d'ouverts)

- Toute réunion d'ouverts de $(E, \| \cdot \|)$ est un ouvert de $(E, \| \cdot \|)$.
- Toute intersection **finie** d'ouverts de $(E, \| \cdot \|)$ est un ouvert de $(E, \| \cdot \|)$.

Preuve

- Soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ une réunion d'ouverts de $(E, \| \cdot \|)$. Pour tout $a \in A$, il existe $i \in I$ tel que $a \in A_i$. Comme A_i est un ouvert,

il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A_i$. A fortiori, $B(a, r)$ est incluse dans A , qui est donc un ouvert de $(E, \| \cdot \|)$.

- Soit $A = \bigcap_{k=1}^p A_k$ une réunion finie d'ouverts de $(E, \| \cdot \|)$, avec $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $a \in A$, pour tout $k \in 1, p$, il existe un réel $r_k > 0$ tel que $B(a, r_k) \subset A_k$. Alors, en posant $r = \min_{k \in 1, p} (r_k)$, r est strictement positif et pour tout $k \in 1, p$, $B(a, r) \subset A_k$. Par conséquent, $B(a, r) \subset A$, et A est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$.

Définition 2 (fermés)

Soit A une partie de E . On dit que A est un **fermé** pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque son complémentaire $E \setminus A$ dans E est un ouvert de E .

Par exemple, toute boule fermée, toute sphère, est un fermé de E .

Proposition 2 (réunion finie, intersection quelconque de fermés)

- Toute réunion **finie** de fermés de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.
- Toute intersection (quelconque) de fermés de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

Preuve

- Soit $A = \bigcup_{k=1}^p A_k$ une intersection finie de fermés de $(E, \|\cdot\|)$. Alors ${}^c A = \bigcap_{k=1}^p {}^c A_k$ (d'après la loi de de Morgan).

Or les A_k sont des fermés, leurs complémentaires sont donc des ouverts. Ainsi, ${}^c A$ est réunion finie d'ouverts de

$(E, \|\cdot\|)$; c'est donc un ouvert de cet espace vectoriel normé, et il en résulte que A est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

- Démonstration analogue à celle du point précédent.

d. Adhérence, frontière

Définition

- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé ; soit A une partie de E .
Soit $a \in E$. On dit que, pour la norme $\|\cdot\|$, a est un **point adhérent** à A , lorsque :
$$\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé **adhérence** de A , et il est noté $\overline{A}$.
- On appelle **intérieur** de A , et l'on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points a de E tels que
$$\exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset A.$$
- On appelle **frontière** de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, et on la note $\delta(A)$; $\delta(A)$ est donc l'ensemble des points A de E tels que
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B(a, \varepsilon), x \notin A \end{cases}.$$

Exemple

Soit, dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne usuelle *: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4y < x^2 + y^2 - 2x \leq 1\}$.

Déterminer l'intérieur, l'adhérence, la frontière de A .

* Nous verrons plus loin qu'en dimension finie, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ et $\delta(A)$ ne dépendent pas de la norme choisie.

Propriétés

- On a $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

- $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E ; c'est le plus grand ouvert inclus dans A .
- $\overline{A}$ est un fermé de E ; c'est le plus petit fermé contenant A .

e. Partie dense

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé ; soit A une partie de E . On dit que A est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.

II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

1. Généralités

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a. Suites d'éléments de E

Définition 1 (suite d'éléments de E)

On appelle suite d'éléments de E toute application $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow E \\ n \mapsto u_n \end{cases}$.

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E indexées par $\mathbb{N}$.

Par extension, on appellera encore suite d'éléments de E toute application

$$(u_n)_{n \geq n_0} : \begin{cases} n_0, +\infty \rightarrow E \\ n \mapsto u_n \end{cases} \text{ ou } (u_n)_{n_0 \leq n \leq n_1} : \begin{cases} [n_0, n_1] \rightarrow E \\ n \mapsto u_n \end{cases}.$$

Remarque

On montre de manière relativement immédiate que $E^{\mathbb{N}}$, muni des lois naturelles, est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

Définition 2 (suites extraites)

On appelle **suite extraite** d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers lui – même.

b. Suites bornées, suites convergentes

Définition 1 (suite bornée)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On dit que u est bornée pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

Définition 2 (suites convergentes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

- Soit a un vecteur de E .

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - a\| = 0$,

c'est – à – dire lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq \varepsilon$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convergente lorsqu'il existe $a \in E$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a ; dans les autres cas, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Remarque

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers a si et seulement si : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in B(a, r)$.

c. Propriétés des suites convergentes

Proposition 1 (les suites convergentes sont bornées)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On suppose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente pour la norme $\| \cdot \|$.
Alors, pour la norme $\| \cdot \|$, cette suite est bornée.

Remarque

La réciproque est évidemment fautive : si $E \neq \{0\}$, il existe des suites d'éléments de E bornées, mais non convergentes.

Preuve

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, en notant a sa limite : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq \varepsilon$, et en particulier : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq 1$. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée, ce qui entraîne la bornitude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 2 (unicité, sous réserve d'existence, de la limite)

Soit à nouveau $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers deux vecteurs a et b pour la norme $\| \cdot \|$, alors $a = b$.

Preuve

On peut raisonner par l'absurde, en supposant que $a \neq b$; dans ce cas, $\varepsilon = \frac{1}{3} \|b - a\|$ est strictement positif, et il existe deux entiers n_1, n_2 tels que $\forall n \geq n_1, \|u_n - a\| \leq \varepsilon$ et $\forall n \geq n_2, \|u_n - b\| \leq \varepsilon$. Alors, en choisissant n tel que $n \geq \max(n_1, n_2)$:
 $3\varepsilon = \|b - a\| = \|b - u_n + u_n - a\| \leq \|b - u_n\| + \|u_n - a\| \leq 2\varepsilon$, ce qui est effectivement absurde.

Proposition 3 (opérations algébriques sur les limites)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E , convergeant respectivement vers des vecteurs a et b .
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda a + b$.

Preuve

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence d'une suite, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n - a\| \leq \varepsilon$ et $n \geq n_2 \Rightarrow \|u_n - b\| \leq \varepsilon$. Posons $N = \max(n_1, n_2)$. Pour tout entier $n \geq N$, on a par inégalité triangulaire $\|\lambda u_n + v_n - (\lambda a + b)\| \leq |\lambda| \|u_n - a\| + \|v_n - b\|$, d'où : $\|\lambda u_n + v_n - (\lambda a + b)\| \leq (|\lambda| + 1)\varepsilon$.
Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|(\lambda u_n + v_n) - (\lambda a + b)\| \leq (|\lambda| + 1)\varepsilon$:

la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda a + b$.

Remarque

On déduit de manière assez immédiate de cette proposition que l'ensemble des suites d'éléments de E , convergentes pour la norme $\|\cdot\|$, est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

Proposition 4 (convergence et suites extraites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ , toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même limite.

Remarque

Comme dans le cas de suites à valeurs scalaires, on a une réciproque partielle de ce résultat : la convergence des suites extraites des termes d'indices pairs et impairs vers une même limite ℓ implique la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ .

d. Mise en garde (la notion de convergence dépend hautement de la norme choisie)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, muni de deux normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

- Il est possible que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la norme $\mathcal{N}$, mais diverge pour la norme $\mathcal{N}'$.
- Il est également possible que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à la fois au sens de $\mathcal{N}$ et au sens de $\mathcal{N}'$, mais que les limites soient différentes.

Contre-exemples

- Dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sqrt{n+1} x^n.$$

- Si l'on munit $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$: $\left\{ \begin{array}{l} C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt \end{array} \right.$, alors, au sens de $\|\cdot\|_1$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers la fonction nulle, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \sqrt{n+1} \int_0^1 x^n dt = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_1 = 0.$$

- Si maintenant on munit $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$: $\left\{ \begin{array}{l} C^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \end{array} \right.$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |\sqrt{n+1} x^n| = \sqrt{n+1}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty, \text{ ce qui interdit bien sûr la convergence, au sens de}$$

la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers quelque fonction que ce soit.

Ainsi, une suite peut converger pour une norme, mais diverger pour une autre. Nous avons de plus montré qu'une suite peut être bornée pour une norme, sans l'être pour une autre.

- Munissons $\mathbb{R}[X]$ des normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ définies par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \mathcal{N}(P) = \max_{x \in [0, \frac{1}{4}]} |P(x)|, \text{ et } \mathcal{N}'(P) = \max_{x \in [\frac{1}{4}, 1]} |P(x)|.$$

Ce sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$... Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \left(1 - x^n\right)^{2^n}$.

Alors, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)^{2^n} \leq P_n(x) \leq 1$, et $\forall x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, $0 \leq P_n(x) \leq \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^{2^n}$. Donc :

$$\circ \text{ On a } 0 \leq \max_{x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]} \left(1 - P_n(x)\right) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)^{2^n}, \text{ d'où } \mathcal{N}(P_n(x) - 1) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)^{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } 1 - \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)^{2^n} &= 1 - \exp\left(2^n \ln\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \exp\left(2^n \left(-\frac{1}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)\right)\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right), \end{aligned}$$

et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)^{2^n}\right] = 0$. On en déduit, par encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(P_n - 1) = 0$, et que

la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, au sens de la norme $\mathcal{N}$, vers le polynôme constant égal à 1.

◦ ◦ De manière analogue,

$$0 \leq \max_{x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]} P_n(x) \leq \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^{2^n}, \text{ soit } \mathcal{N}'(P_n) \leq \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^{2^n} = \exp\left(2^n \ln\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right).$$

$$\text{Or } \exp\left(2^n \ln\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(2^n \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^n + o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n + o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\right),$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(2^n \ln\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) = 0$. A nouveau par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}'(P_n) = 0$.

Ainsi, au sens de la norme $\mathcal{N}'$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul.

Ceci prouve qu'une suite peut converger pour deux normes, sans que ses limites, au sens de ces deux normes, ne soient nécessairement égales.

2. Caractérisation séquentielle des fermés, et de l'adhérence d'une partie

Proposition 1 (caractérisation des points adhérents à une partie)

Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Soit a un point de E .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i — a est un point adhérent à A , ie $a \in \overline{A}$;
- ii — Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a .

Preuve

- Si a est adhérent à A : pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B\left(a, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$

est non vide ; choisissons-y un élément a_n . La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est à valeurs dans A ; pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|a_n - a\| < \frac{1}{n+1}. \text{ Il en résulte que } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a.$$

- S'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A , alors pour tout $r > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$

$a_n \in B(a, r)$. En particulier, a_N appartient à $B(a, r)$, et aussi à $A : B(a, r) \cap A$ est non vide, et a est un point adhérent à A .

Proposition 2 (caractérisation séquentielle des fermés)

Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i – A est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

ii – Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente d'éléments de A , $\lim_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$ est encore un élément de A .

iii – Tout élément adhérent à A est un élément de A .

iv – La frontière de A est incluse dans A .

Preuve

- D'après la proposition précédente, les limites d'éléments de A sont les points adhérents à A ; on a donc $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, et $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ est clair. Reste à prouver que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
- Supposons que A est un fermé. Alors, son complémentaire $B = {}^c A$ dans E est un ouvert.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergent vers un vecteur a de E . Par définition de la convergence d'une suite, pour tout $r > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $a_n \in B(a, r)$. En particulier, pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$, et donc $B(a, r) \not\subset B$. Or puisque B est un ouvert : $\forall b \in B, \exists r > 0, B(b, r) \subset B$. Par conséquent, a n'appartient pas à B , ce qui revient à dire que $a \in A : (i) \Rightarrow (ii)$.

Supposons maintenant que A n'est pas un fermé de E . Alors, son complémentaire $B = {}^c A$ n'est pas un ouvert, donc :

$$\exists b \in B, \forall r > 0, B(b, r) \not\subset B, \text{ soit : } \exists b \in B, \forall r > 0, B(b, r) \cap A \neq \emptyset.$$

En particulier : $\exists b \in B, \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, a_n \in B\left(b, \frac{1}{n+1}\right)$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est à valeurs dans A , et converge vers b , qui n'est pas un élément de A :

on a $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$, et ceci achève la démonstration.

III Comparaison de normes

1. Normes équivalentes

Définition 1 (normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ deux normes sur E .

- On dit que la norme $\mathcal{N}_1$ domine la norme $\mathcal{N}_2$ lorsque :

$$\exists a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \mathcal{N}_2(x) \leq a \mathcal{N}_1(x)$$

- On dit que les normes $\mathcal{N}_2$ est équivalente à la norme $\mathcal{N}_1$ lorsque :

$$\exists (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, a \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq b \mathcal{N}_1(x).$$

2. Propriétés de la notion d'équivalence

Soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ trois normes sur l'espace vectoriel E .

Alors :

- Les normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes si et seulement si chacune d'entre elles domine l'autre.
- On a en outre les propriétés suivantes (propriétés des relations d'équivalence) :

i – réflexivité :

$\mathcal{N}_1$ est équivalente à elle-même.

ii – symétrie :

$\mathcal{N}_2$ est équivalente $\mathcal{N}_1$ si et seulement si $\mathcal{N}_1$ est équivalente à $\mathcal{N}_2$.

On pourra donc dire, plutôt que $\mathcal{N}_2$ est équivalente à $\mathcal{N}_1$, que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes.

iii – Transitivité :

Si $\mathcal{N}_2$ est équivalente $\mathcal{N}_1$ et si $\mathcal{N}_3$ est équivalente à $\mathcal{N}_2$, alors $\mathcal{N}_3$ est équivalente à $\mathcal{N}_1$.

3. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Proposition

Alors pour toute partie A de E :

- A est borné pour la norme $\mathcal{N}_2$ si et seulement si A est borné pour la norme $\mathcal{N}_1$.
- A est un ouvert de E pour la norme $\mathcal{N}_2$ si et seulement si c'est un fermé de E pour la norme $\mathcal{N}_1$.
- A est un fermé de E pour la norme $\mathcal{N}_2$ si et seulement si c'est un fermé de E pour la norme $\mathcal{N}_1$.
- L'adhérence de A pour la norme $\mathcal{N}_2$ est égale à L'adhérence de A pour la norme $\mathcal{N}_1$.

4. Invariance de la convergence d'une suite par passage à une norme équivalente.

Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ deux normes équivalentes sur E .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Alors :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné pour la norme $\mathcal{N}_2$ si et seulement si elle est bornée pour la norme $\mathcal{N}_1$.
- Soit $\ell \in E$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme $\mathcal{N}_2$ si et seulement si elle converge vers ℓ pour la norme $\mathcal{N}_1$.

Exemple type d'utilisation

La propriété d'invariance de la convergence d'une suite par passage à une norme équivalente est utile pour prouver que deux normes ne sont pas équivalentes : pour ce faire, il est pratique de trouver une suite qui converge pour l'une de ces normes, mais pas pour l'autre.

Par exemple :

Montrons que sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, les normes $\| \cdot \|_{\infty} : f \mapsto \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et $\| \cdot \|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$

ne sont pas équivalentes.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto t^n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, donc, pour la norme $\|\cdot\|_1$, la suite (f_n) converge vers la

fonction nulle. En revanche : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$, donc, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, la suite (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle.

Ceci suffit à prouver que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

IV Cas de la dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie.

1. Equivalence des normes en dimension finie.

On admet la proposition suivante :

Proposition 1 (équivalence des normes en dimension finie)

Toutes les normes sur E sont équivalentes

En conséquence, tous les résultats énoncés en paragraphe précédent, concernant les normes équivalentes, sont valables pour toutes les normes en dimension finie. En particulier :

Proposition 2 (convergence d'une suite en dimension finie)

La nature (convergente ou divergente) d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E ne dépend pas de la norme choisie. En cas de convergence, sa limite est elle aussi indépendante de la norme considérée.

On pourra donc s'autoriser à écrire que « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge », ou que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = a$, sans préciser la norme utilisée.

Proposition 3 (ouverts, fermés, adhérence en dimension finie)

Soit A une partie de E .

- Le caractère borné ou non de A ne dépend pas de la norme choisie.
- La nature topologique de A (ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre) ne dépend pas de la norme choisie.
- Pour tout $a \in E$, le fait que a soit adhérent, ou non, à A , ne dépend pas de la norme choisie.
- La frontière, l'intérieur de A ne dépendent pas de la norme choisie.

En conséquence,

on pourra dire que « A est un ouvert de E », que « a n'est pas un point adhérent à A »..., sans mention de la norme utilisée.

2. Convergence en dimension finie

Proposition (convergence $\Leftrightarrow$ convergence coordonnée par coordonnée)

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel normé de dimension finie n , muni d’une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d’éléments de E , et soit a un vecteur de E .

Posons $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i(k) e_i$. On a l’équivalence :

$$\left((u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a \text{ dans } E \right) \iff \left(\text{Pour tout } i \in 1, n, (\alpha_i(k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a_i \text{ dans } \mathbb{K} \right).$$

Remarques

- On montre également que :

La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E si et seulement si pour tout $i \in 1, n$, $(\alpha_i(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.

- On déduit de la proposition précédente que pour tous $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie E et F , pour tout

$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et pour tout $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$,

$$\left((u_k, v_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } (a, b) \text{ dans } E \times F \right) \iff \left(\left((u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } a \text{ dans } E \right) \text{ et } \left((v_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } b \text{ dans } F \right) \right).$$

V Applications entre espaces vectoriels normés

A_ GÉNÉRALITES EN DIMENSION QUELCONQUE

1. Propriété vraie au voisinage d’un point

Définition (propriété vraie au voisinage d’un point)

- Soit $(E, \mathcal{N})$ un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel normé, et A une partie de E .

Soit $\mathcal{P} : x \in A \mapsto \mathcal{P}(x) \in \{ \text{vrai, faux} \}$ une proposition logique. Soit a un point de A ou un point adhérent à A . On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a dans A lorsque

$$\exists r > 0, \forall x \in E, x \in A \cap B(a, r) \Rightarrow \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

De manière analogue

- Soit c un réel, et soit $\mathcal{P} : x \in]c, +\infty[\mapsto \mathcal{P}(x) \in \{ \text{vrai, faux} \}$ une proposition logique.

On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de $+\infty$ lorsque :

$$\exists M > c, \forall x \in \mathbb{R}, x > M \Rightarrow \mathcal{P}(x) \text{ est vraie.}$$

On définit de la même façon la notion de proposition vraie au voisinage de $-\infty$.

2. Applications lipschitziennes

Définition (applications lipschitziennes)

Soient $(E, \mathcal{N})$ et $(F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels normés, A une partie de E , f une application de A dans F , et k un réel positif ou nul.

- L’application f est dite **k – lipschitzienne** pour les normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2, \mathcal{N}'(f(x) - f(y)) \leq k \mathcal{N}(x - y).$$

Autrement dit, en notant d et d' les distances respectivement associées à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$, f est k -lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2, d'(f(x) - f(y)) \leq k d(x - y).$$

- On dit que f est **lipschitzienne** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k -lipschitzienne.

Propriétés

- L'ensemble $\text{Li}(A, F)$ des applications lipschitziennes de A dans F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- En revanche, pour $k \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'ensemble des application k -lipschitziennes de A vers F **n'est pas** un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, dès lors que A contient au moins deux éléments.
- Soient $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}'), (G, \mathcal{N}'')$ trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, A une partie de E , B une partie de F , $f : A \rightarrow B$ une application k -lipschitzienne, et $g : B \rightarrow G$ une application k' -lipschitzienne. Alors, l'application composée $g \circ f$ est $k \cdot k'$ -lipschitzienne.

3. Applications bornées

Définition (applications bornées)

Soient $(E, \mathcal{N})$ et $(F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, A une partie de E , et f une application de A dans F . L'application f est dite **bornée** pour la norme $\mathcal{N}'$ lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, \mathcal{N}'(f(x)) \leq M$.

Propriétés

- L'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ des applications bornées de A dans F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- L'application $\| \cdot \|_\infty : \left(\begin{array}{c} \mathcal{B}(A, F) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sup_{x \in A} \mathcal{N}'(f(x)) \end{array} \right)$ est une norme sur $\mathcal{B}(A, F)$.
- Soient $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}'), (G, \mathcal{N}'')$ trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, A une partie de E , B une partie de F , $f : A \rightarrow B$ une application, et $g : B \rightarrow G$ une application bornée. Alors, l'application $g \circ f$ est bornée.

B_ LIMITES ET CONTINUITÉ

1. Limite d'une fonction en un point

Définition (limite d'une fonction en un point)

- Soient $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et A une partie de E .
Soit $f : A \rightarrow F$; soit a un point de A ou un point adhérent à A .
 - Soit b un vecteur de F .
On dit que f admet pour limite b au point a , et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ou $\lim_a f = b$, lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \mathcal{N}(x - a) \leq \delta \Rightarrow \mathcal{N}'(f(x) - b) \leq \varepsilon.$$
 - On dit que f admet une limite au point a lorsqu'il existe $b \in F$ tel que $\lim_a f = b$.

De manière analogue,

Définition bis (limite d'une fonction en un point : une extension dans le cas où E ou F est égal à $\mathbb{R}$)

- Soit $(E, \mathcal{N})$ un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel normé, et A une partie de E .

Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$; soit a un point de A ou un point adhérent à A .

On dit que f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a lorsque

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \mathcal{N}(x - a) \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$$

(resp. $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \mathcal{N}(x - a) \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq -M$).

- Soit $(F, \mathcal{N}')$ un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel normé. Soient $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, et $f :]c, +\infty[\mapsto F$.

Soit $b \in F$; soit a un point de A ou un point adhérent à A . On dit que f admet pour limite b en $+\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > c, \forall x \in]c, +\infty[, x \geq M \Rightarrow \mathcal{N}'(f(x) - b) \leq \varepsilon.$$

Remarque

On dispose, bien entendu, d'une définition analogue de la limite en $-\infty$ d'une application $f :]-\infty, d[\mapsto F$, où $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; les

notations $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, etc. restent valables... du moment qu'elles sont adaptées à la situation.

Propriété 1 (unicité, sous réserve d'existence, de la limite en un point)

Soit $(E, \mathcal{N})$, $(F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E . Soit $f : A \mapsto F$; soit a un point de A ou un point adhérent à A . Soit $(b, b') \in F^2$.

On suppose que $\lim_a f = b$ et $\lim_a f = b'$. Alors, $b = b'$.

Propriété 2 (Opérations sur les limites)

Soient $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels normés, et A une partie de E .

Soient $f, g : A \mapsto F$, et $\alpha : A \mapsto \mathbb{K}$. Soit a un point de A ou un point adhérent à A ;

on suppose que f, g, α admettent une limite en a . Alors,

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lim_a (\lambda f + g) = \lambda \lim_a f + \lim_a g.$

- $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x)) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)).$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \neq 0 : \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{\alpha(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} (f(x))}{\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x))}.$

- En notant b la limite de f en $a : \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|'.$

Preuves

Sans difficulté, mais à rédiger pour vérifier qu'on ne se mélange pas les pinceaux entre les vecteurs, et les scalaires.

Remarque

Tout ce qui est raisonnable reste vrai dans le cas de limites infinies, ou de limites au voisinage de l'infini... rester raisonnable...

Propriété 3 (Composition de limites)

Soient $(E, \mathcal{N})$, $(F, \mathcal{N}')$, $(G, \mathcal{N}'')$ trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, A une partie de E ,

et B une partie de F . Soient $f : A \mapsto B$, et $g : B \mapsto G$. Soit a un point de A ou un point adhérent à A . On

suppose que f admet une limite b en a , et que g admet une limite c en b . Alors, $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

2. Continuité

Définition (Continuité d'une fonction en un point ; continuité)

Soient $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E . Soit $f : A \mapsto F$.

- Soit a un point de A . On dit que f est continue en a si elle y admet une limite $b \in F$.
- f est dite continue sur A (ou, s'il n'y a pas ambiguïté, continue) si elle est continue en tout point de A .

Propriété 1 (opérations sur les fonctions continues)

Soient $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E .

Soient $f, g : A \mapsto F$, et $\alpha : A \mapsto \mathbb{K}$ trois fonctions continues. Alors,

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda f + g$ est continue.
- La fonction αf est continue.
- La fonction $\frac{f}{\alpha}$ est continue là où elle est définie.
- La fonction $\|f\|$ est continue.

Propriété 2 (Composée de fonctions continues)

Soient $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|'), (G, \|\cdot\|'')$ trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, A une partie de E , et B une partie de F .

Soient $f : A \mapsto B$ et $g : B \mapsto G$ deux fonctions continues.

Alors, l'application composée $g \circ f$ est continue.

Propriété 3 (Continuité des applications lipschitziennes)

Soient $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E .

Soient $f : A \mapsto F$ une application, supposée lipschitzienne. Alors, f est continue.

3. Prolongement par continuité

Définition – proposition (Prolongement par continuité)

Soit $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E .

Soit $f : A \mapsto F$. Soit a un point adhérent à A , n'appartenant pas à A .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i – f se prolonge par continuité en a , ie., il existe une application $\bar{f} : A \cup \{a\} \rightarrow F$ continue et telle que pour tout $x \in A$, $\bar{f}(x) = f(x)$.
- ii – f admet une limite $b \in F$ en a .

Lorsque ces conditions sont remplies, le prolongement continu $\bar{f}$ de f en a est unique, et il est obtenu en posant $\bar{f}(a) = b$.

4. Caractérisations séquentielles

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle d'une limite en un point)

Soit $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E . Soit $f : A \mapsto F$. Soit a un point adhérent à A .

i – On suppose que f admet une limite $b \in F$ en a .

Alors, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} = b$.

ii – Réciproquement, soit $b \in F$. On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a ,

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} = b$. Alors, f admet pour limite b en a .

Preuve

i – Supposons donc que f admet une limite $b \in F$ en a , et considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A

convergeant vers a . Pour tout $\varepsilon > 0$:

- Par définition de la limite d'une fonction en un point : $\exists \delta > 0, \forall x \in A, \mathcal{N}(x - a) \leq \delta \Rightarrow \mathcal{N}'(f(x) - b) \leq \varepsilon$.
- Par définition de la convergence d'une suite : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \mathcal{N}(u_n - a) \leq \delta$.

Alors, pour tout $n \geq N, u_n \in A$ et $\mathcal{N}(u_n - a) \leq \delta$, donc $\mathcal{N}'(f(u_n) - b) \leq \varepsilon$. Finalement, on a montré que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \mathcal{N}'(f(u_n) - b) \leq \varepsilon$: la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers b .

ii – Supposons maintenant que f n'admet pas de limite en a . Soit $b \in F$.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A, \mathcal{N}(x - a) \leq \delta \text{ et } \mathcal{N}'(f(x) - b) \geq \varepsilon.$$

En particulier, pour un tel ε : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, \mathcal{N}(x_n - a) \leq \frac{1}{n+1}$ et $\mathcal{N}'(f(x_n) - b) \geq \varepsilon$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers a (puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{N}(u_n - a) \leq \frac{1}{n+1}$), et $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers b (car $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{N}'(f(u_n) - b) \geq \varepsilon$). Ceci prouve, par contraposition, que s'il existe $b \in F$ tel que pour toute suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a , $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un même vecteur b , alors f admet pour limite b en a .

Remarque

En adaptant la preuve précédente, on démontre aisément que :

pour $f : A \mapsto \mathbb{R}, \lim_a f = +\infty \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = +\infty$,

pour $f : \mathbb{R} \mapsto F, \lim_{+\infty} f = b \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim f(u_n) = b$, etc.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite en un point)

Soit $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriel normés, et A une partie de E .

Soit $f : A \mapsto F$. Soit a un point de A . Alors,

La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Remarque

C'est une conséquence immédiate du résultat de la question précédente.

5. Images réciproques d'ouverts et de fermés

Rappel de définition (image réciproque d'une partie)

Soient E, F deux ensembles, et soit une application $f : E \rightarrow F$.

Pour toute partie B de F , on définit l'image réciproque de B par f , notée $f^{-1}(B)$, par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Remarques

- Rappelons que la notation $f^{-1}(B)$ est valable pour toute application, alors que l'application f^{-1} n'existe que si f est bijective.
- Avec les notations précédentes : $\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Proposition (image réciproque d'un fermé, d'un ouvert, par une application continue)

Soient $(E, \mathcal{N}), (F, \mathcal{N}')$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriel normés, soit $f : E \rightarrow F$ une application continue. Alors :

i – pour tout Ω ouvert de F , $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E ;

ii – pour tout B fermé de F , $f^{-1}(B)$ est un fermé de E .

Preuve

- Soit Ω un ouvert de F . Pour tout $x \in f^{-1}(\Omega)$, $f(x)$ est un élément de l'ouvert Ω , il existe donc un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_{\mathcal{N}'}(f(x), r)$ soit incluse dans Ω .

L'application f étant continue en x , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in E$, $\mathcal{N}(y - x) < \delta \Rightarrow \mathcal{N}'(f(y) - f(x)) < r$.

Alors, pour tout $y \in B_{\mathcal{N}}(x, \delta)$, $f(y)$ appartient à $B_{\mathcal{N}'}(f(x), r)$, donc à Ω , ce qui revient à dire que y appartient à $f^{-1}(\Omega)$.

Finalement, la boule ouverte $B_{\mathcal{N}}(x, \delta)$ est incluse dans $f^{-1}(\Omega)$, et $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E .

- Soit B un fermé de F . Posons $\Omega = F \setminus B$. Comme complémentaire d'un fermé, Ω est un ouvert de F . Alors, d'après ce qui précède, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E . Or $f^{-1}(B) = E \setminus f^{-1}(\Omega)$; $f^{-1}(B)$ est donc un fermé de E .

Exemples

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors :

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E, f(x) > \alpha\}$ et $\{x \in E, f(x) \neq \alpha\}$ sont des ouverts de E .

Les ensembles $\{x \in E, f(x) \geq \alpha\}$ et $\{x \in E, f(x) = \alpha\}$ sont des fermés de E .

C_ CAS DE LA DIMENSION FINIE

1. Fonctions coordonnées

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie, et soit $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . Soit A une partie de E , et soit une application $f : A \rightarrow F$.

Définition (fonctions coordonnées)

Posons pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \varepsilon_i$.

Les applications $f_i \left(\begin{array}{l} A \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto f_i(x), i\text{-ème coordonnée de } f(x) \text{ dans la base } C \text{ de } F \end{array} \right.$

sont appelées *fonctions coordonnées*, ou *fonctions composantes*, de f dans la base C .

Dans ce qui suit, on note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans la base C .

Les démonstrations des trois propositions ci – dessous, sans difficulté, sont laissées au lecteur.

Proposition 1

La fonction f est bornée si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées dans la base C est bornée.

Proposition 2

Soit a un point de A ou un point adhérent à A . Soit $b = \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i$ un point de F .

L'application f admet pour limite b au point a si et seulement si : $\forall i \in \{1, n\}, \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$.

Proposition 3

- Soit a un point de A .
L'application f est continue en a si et seulement si toutes ses applications coordonnées sont continues en ce point.
- f est continue sur A si et seulement si toutes ses applications coordonnées sont continues sur A .

2. Un type courant de fonctions continues

On considère ici un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie n , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Proposition

Soit A une partie de E , et soit $f : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{K} \\ x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \mapsto f(x) \end{cases}$.

On suppose que f est une fonction polynomiale en $x_1, \dots, x_n$. Alors, f est continue.

Applications :

- L'application trace : $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \mapsto \text{Tr}(M) \end{cases}$ est continue.
- Le déterminant $\det : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \mapsto \det(M) \end{cases}$ est une fonction continue.
- On déduit également de la proposition précédente que l'application $\chi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ M \mapsto \chi_M \end{cases}$ est elle aussi continue.

3. Fonctions continues sur un fermé borné

Théorème (image d'un fermé borné par une application continue)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels normés de dimension finie, K un fermé borné de E , et $f : K \rightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un fermé borné de F .

Ce résultat est admis.

Corollaire (image d'un fermé borné par une application continue)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, K un fermé borné de E , et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, ie. f possède sur K un minimum et un maximum.

Preuve

La fonction f étant continue sur un fermé borné K de E , $f(K)$ est un borné de $\mathbb{R}$. Donc :

- $f(K)$ est borné, ce qui prouve déjà que f est bornée.
- Notons M la borne supérieure de $f(K)$. Par définition d'une borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in K, f(x) \geq M - \varepsilon \text{ et } \forall x \in K, f(x) \leq M - \varepsilon.$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in K, M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in f(K), M - \frac{1}{n} \leq y_n \leq M$. Mais alors, M est limite d'une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $f(K)$. Comme $f(K)$ est fermé, on en déduit que $M \in f(K)$. Donc, il existe $x \in K$ tel que $f(x) = M$, et notre borne supérieure est un maximum : f atteint sa borne supérieure, et l'on prouve de manière similaire qu'elle atteint sa borne inférieure, qui est donc son minimum.

D_ APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

1. Continuité des applications linéaires en dimension finie

Proposition (en dimension finie, les applications linéaires sont lipschitziennes)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels normés de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est lipschitzienne : Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

Preuve

Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Notons $\|\cdot\|_{\mathcal{B}, \infty}$: $\left(x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \mapsto \max_{i \in 1, n} |x_i| \right)$ la norme infini associée à cette base.

L'espace vectoriel E étant de dimension finie, les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B}, \infty}$ et $\|\cdot\|_E$ sont équivalentes ; soit alors $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout

$$x \in E, \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} \leq \alpha \|x\|_E. \text{ Pour tout } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E :$$

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_F &= \left\| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right\|_F \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|f(e_k)\|_F \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} \|f(e_k)\|_F = \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} \sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F \leq \alpha \|x\|_E \sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F. \end{aligned}$$

On pose alors $k = \alpha \sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F$, et l'on a pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$. $\square$

Corollaire (Continuité des applications linéaires en dimension finie)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels normés de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.

2. Continuité des applications bilinéaires

Proposition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $\varphi : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Alors :

- i* – Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\|\varphi(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F$.
- ii* – L'application φ est continue.

Preuve

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F .

Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et pour tout $y = \sum_{j=1}^p y_j \varepsilon_j \in F$: $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_i y_j \varphi(e_i, \varepsilon_j)$, donc

$$\|\varphi(x, y)\|_G \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |x_i| |y_j| \|\varphi(e_i, \varepsilon_j)\|_G \leq \|x\|_{\mathcal{B}, \infty} \|y\|_{\mathcal{C}, \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \|\varphi(e_i, \varepsilon_j)\|_G.$$

Tout le monde étant de dimension finie, toutes les normes sont ici équivalentes. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}, \infty} \leq \alpha \|\cdot\|_E$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\|\cdot\|_{\mathcal{C}, \infty} \leq \beta \|\cdot\|_F$.

Revenant à nos vecteurs x et y , on a $\|\varphi(x, y)\|_G \leq \underbrace{\left(\alpha \beta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \|\varphi(e_i, \varepsilon_j)\|_G \right)}_k \|x\|_E \|y\|_F$.

Ceci prouve *i* –, et *ii* – s'en déduit.