

Fonctions de plusieurs variables

I LIMITE ET CONTINUITÉ

A Limite en un point adhérent

1_ Définitions, notations, et propriétés fondamentales

Définition 1

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \overline{\mathcal{D}}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $\vec{a}$ ou que f tend vers ℓ lorsque $\vec{x}$ tend vers $\vec{a}$ lorsque l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall \vec{x} \in \mathcal{D}, \vec{x} \in B(\vec{a}, \eta) \Rightarrow f(\vec{x}) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall \vec{x} \in \mathcal{D}, \|\vec{x} - \vec{a}\| < \eta \Rightarrow |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon.$

Définition 2

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \overline{\mathcal{D}}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $\vec{a}$ ou que f tend vers $+\infty$ lorsque $\vec{x}$ tend vers $\vec{a}$ lorsque l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\forall A > 0, \exists \eta > 0 / \forall \vec{x} \in \mathcal{D}, \vec{x} \in B(\vec{a}, \eta) \Rightarrow f(\vec{x}) \in]A, +\infty[.$
- $\forall A > 0, \exists \eta > 0 / \forall \vec{x} \in \mathcal{D}, \|\vec{x} - \vec{a}\| < \eta \Rightarrow f(\vec{x}) > A.$

Je vous laisse le soin d'écrire ce qu'est une fonction admettant $-\infty$ pour limite en $\vec{a}$...

Les notations utilisées sont classiques : $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \ell$, ou $\lim_{\vec{a}} f = \ell$, itou avec les infinis.

La propriété fondamentale d'**unicité de la limite** est toujours d'actualité.

2_ Théorèmes de comparaison

Théorème 1 (dit de domination)

Soit f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \overline{\mathcal{D}}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}, |f(\vec{x}) - \ell| \leq g(\vec{x}).$

$$\circ \circ \quad \lim_{x \rightarrow a} g(\vec{x}) = 0.$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow a} f(\vec{x}) = \ell.$$

Théorème 2 (squeeze)

Soient f, g, h trois applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \overline{\mathcal{D}}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

- $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}, f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \leq h(\vec{x})$.
- ◦ f et h admettent une limite en $\vec{a}$, et : $\lim_{x \rightarrow a} f(\vec{x}) = \lim_{x \rightarrow a} h(\vec{x}) = \ell$.

Alors :

- L'application g admet une limite en $\vec{a}$, et $\bullet \bullet \quad \lim_{x \rightarrow a} g(\vec{x}) = \ell$.

Preuve

Je ne saurais que vous conseiller de l'écrire... Cela vous permettra de voir qu'il ne s'agit de rien d'autre que d'une adaptation avec de nouvelles notations de la preuve qui a été faite pour les fonctions réelles d'une variable réelle, et cela vous entraînera à utiliser les écritures vues plus haut !

On dispose aussi de la version correspondante à ces deux choses-là pour des limites infinies :

Théorème 3

Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \overline{\mathcal{D}}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$. On suppose que :

- $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}, f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$.
- ◦ $\lim_{x \rightarrow a} f(\vec{x}) = +\infty$.

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow a} g(\vec{x}) = +\infty.$$

Ces trois résultats s'avèrent très utiles en pratique pour prouver l'existence de limites, et pour les déterminer de manière explicite, voir exercices !

3 Algèbre des limites

Les opérations algébriques sur les limites (limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une application composée...) sont analogues à ceux rencontrés pour les fonctions d'une variable réelle, et les problèmes qui se posent (existence, formes indéterminées...) sont les mêmes.

Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $(u_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ n applications de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I, (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \Omega.$$

Soit alors φ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(t) = f(u_1(t), \dots, u_n(t))$.

Si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, l'application u_k admet une limite ℓ_k en un certain $t_0 \in I$,

et si f admet une limite λ en $(\ell_1, \dots, \ell_n)$, alors φ admet la limite λ en t_0 .

Ce théorème est intéressant essentiellement pour prouver le fait que certaines fonctions n'admettent pas de limite en certains points... Illustrons !

Exemple d'application

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}.$$

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0, 0, 0)$.

B Continuité

1_ Définitions

Définition 1

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, et $\vec{a} \in \mathcal{D}$ un point de $\mathcal{D}$.

On dit que **f est continue en $\vec{a}$** lorsque l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.
- $\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a})$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall \vec{x} \in \mathcal{D}, \|\vec{x} - \vec{a}\| < \eta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$.

Définition 2

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$.

On dit que **f est continue sur $\mathcal{D}$** ssi f est la restriction à $\mathcal{D}$ d'une application continue.

De manière plus pratique, et même si c'est pas tout à fait totalement entièrement vrai...

On dit que **f est continue sur $\mathcal{D}$** ssi f est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

On note alors : $f \in C^0(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ ou $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.

Bien sûr, les principales applications que vous rencontrerez sont continues (voir ci-dessous...), et les règles algébriques vues pour les limites (donc pour la continuité) permettent de prouver cela à partir de la connaissance des principales applications continues classiques. D'où le petit listing suivant...

2_ Propriétés

Théorème 1

Soient f, g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathcal{D}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que f et g sont continues en $\vec{a}$ (resp. sur $\mathcal{D}$).

- Alors les applications $\lambda f, |f|, f+g, fg, \min(f, g), \max(f, g)$ sont également continues en $\vec{a}$ (resp. sur $\mathcal{D}$).
 - Si de plus g ne s'annule pas en $\vec{a}$ (resp. sur $\mathcal{D}$), les applications $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en $\vec{a}$ (resp. sur $\mathcal{D}$).
 - Si enfin h est continue en $f(\vec{a})$ (resp. sur $f(\mathcal{D})$), alors $h \circ f$ est continue en $\vec{a}$ (resp. sur $\mathcal{D}$).
- Plus généralement, on peut retenir « *grosso modo* » que la composée de deux applications continues est continue.

Pour justifier certains points, profitons-en pour rappeler les deux choses importantes suivantes :

$$\min(f, g) = \frac{f+g - |f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \max(f, g) = \frac{f+g + |f-g|}{2}.$$

Théorème 2

- Toute **application polynomiale sur $\mathbb{R}^n$** , i.e. toute combinaison linéaire d'applications de la forme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ avec $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
- Toute **fonction rationnelle**, i.e. tout quotient de deux applications polynomiales est continue sur son domaine de définition, i.e. encore en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.

A l'aide de tout ça, on justifie la continuité de tout ce qu'on a besoin.

3_ Propriétés globales des applications continues

La principale différence avec les fonctions d'une variable réelle est l'absence d'un analogue au théorème des valeurs intermédiaires, qui n'aurait pas grand sens sans précisions supplémentaires. Par contre, le théorème des bornes atteintes se généralise, et garde d'ailleurs le même nom.



Théorème 1 (des bornes atteintes)

Soit K une partie compacte (i.e. fermée et bornée) de $\mathbb{R}^n$, et $f \in C^0(K, \mathbb{R})$.

Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Ainsi, f admet forcément (au moins) un minimum et (au moins) un maximum sur K .

Ce théorème est cité maintenant et sera repris plus tard, car il nous sera utile (pour en justifier l'existence...) lors de la recherche des extrema des fonctions de plusieurs variables. Mais c'est d'ores et déjà un outil théorique important.

Exemple d'application pour un peu plus tard...

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x y e^{x+2y}.$$

Soit $\Sigma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + 3y^2 = 1 \right\}$.

Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \Sigma$ tel que : $\forall (x, y) \in \Sigma, f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

4 Applications topologico – pratiques de la continuité (1) : Lipschitz & limites

Définition 1

Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, et $M \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est **M -lipschitzienne** sur $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{D}^2, \left| f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \right| \leq M \cdot \left\| \vec{x} - \vec{y} \right\|.$$

Proposition 1

Soient $M \in \mathbb{R}_+^*$, et f une application M -lipschitzienne sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors, f est continue sur $\mathcal{D}$.

Corollaire 1

Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $\| \cdot \|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, donc continue sur $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2

Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $\| \cdot \|$ est continue en $\vec{0}$.

Remarque utile pour les exercices :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (|x| + |y|) = 0.$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \max(|x|, |y|) = 0.$

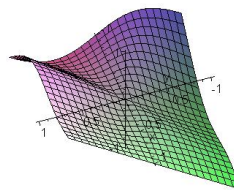
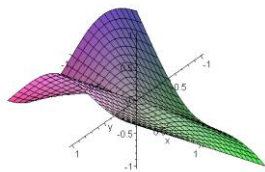
C'est grâce à ces choses-là, et aux théorèmes de comparaison que l'on pourra déterminer des limites en pratique, voir exercice.

Donnons tout de suite un premier exemple significatif :

Exercice type n° 1 :

Montrer que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + x y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

Solution :



Un deuxième, vous voulez vraiment ? Ah bon, oki oki...

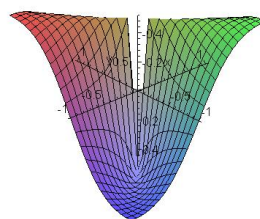
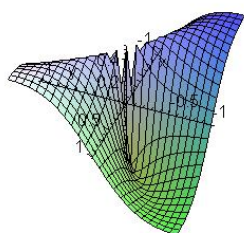
Exercice type n° 2 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Solution :



Corollaire 3

Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout entier naturel $k \in \{1, \dots, n\}$,

l'application $k^{\text{ème}}$ coordonnée : $p_k : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto x_k \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

5_ Applications topologico – pratiques de la continuité (2) : ouverts et fermés

Théorème

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Alors :

- Les ensembles $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) < a \}$, $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) > b \}$ et $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / a < f(\vec{x}) < b \}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

- Les ensembles $\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) \leq a \right\}, \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) \geq b \right\}$ et $\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / a \leq f(\vec{x}) \leq b \right\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2

Soient $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ des intervalles ouverts (*resp.* fermés) de $\mathbb{R}$.

Alors $\prod_{k=1}^n I_k = I_1 \times \dots \times I_n$ est un ouvert (*resp.* fermé) de $\mathbb{R}^n$.

Application... Un nouvel exercice – type !

Exercice type n° 3 :

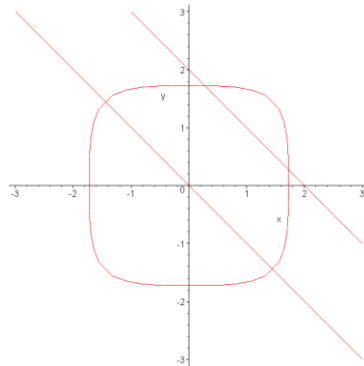
Soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9 \text{ et } 0 \leq x + y \leq 2 \right\}.$$

Q1_ Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Q2_ Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie compacte (*i.e.* fermée et bornée) de $\mathbb{R}^2$.

Solution :



II Applications partielles, dérivées partielles **Applications de classe C^1 & développements limités d'ordre 1 – Gradient**

A Applications partielles

1_ Définitions, notations, et propriétés fondamentales

Définition 1

Soient f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathcal{D}$.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on appelle **$k^{\text{ème}}$ application partielle de f en a** l'application notée $f_{a,k}$ et définie par :

$$f_{a,k} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \\ x_k & \mapsto \end{cases} f(a_1, \dots, a_{k-1}, \boxed{x_k}, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Remarque : $f_{a,k}(a_k) = f(a)$!

On admet le résultat suivant, important d'un point de vue théorique, mais pas en pratique :

Proposition 1

Soit Ω un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$, et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. Alors, pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, l'ensemble

$$\Omega_k = \left\{ x_k \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \in \Omega \right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$, et est donc voisinage de chacun de ses points, et en particulier de a_k .

Exemple idiot

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Déterminer les applications partielles de f au point $M = (1, -3, 2)$.

2_ Continuité & applications partielles

On peut alors établir le résultat suivant :

Théorème

Soit f une application définie sur un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de Ω . On suppose que f est continue en a .

Alors, pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, l'application partielle $f_{a,k}$ est continue en a_k .

Autrement dit, la continuité globale (i.e. par rapport à l'ensemble des variables) entraîne les continuités partielles (i.e. des applications partielles).

La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

Exercice – contreexemple

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Montrer que les deux applications partielles de f sont continues en $(0, 0)$, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Preuve du théorème (il n'est pas essentiel de la retenir, mais la lire aide à comprendre comment ça marche)

Afin d'alléger un peu l'écriture, j'écris la preuve dans le cas $n = 2$.

En vertu de l'équivalence des normes en dimension finie, je travaille avec $\|\cdot\|_\infty$.

Supposons donc f continue en $a = (a_1, a_2)$, et fixons un réel $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists r > 0 / \forall X \in B(a, r) \cap \Omega, \left| f(X) - f(a_1, a_2) \right| \leq \varepsilon.$$

Comme Ω est ouvert, on peut supposer que $B(a, r) \subset \Omega$, quitte à prendre r plus petit.

Si $t \in \mathbb{R}$ vérifie $|t - a_1| < r$, on a $(t, a_2) \in B(a, r)$, puisque

$$\left\| (t, a_2) - (a_1, a_2) \right\|_{\infty} = \max(|t - a_1|, |a_2 - a_2|) = |t - a_1| < r.$$

Ainsi $\left| f(t, a_2) - f(a_1, a_2) \right| \leq \varepsilon$, i.e. $\left| f_{a,1}(t) - f_{a,1}(a_1) \right| \leq \varepsilon$.

On a donc prouvé pour résumer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 / |t - a_1| < r \Rightarrow \left| f_{a,1}(t) - f_{a,1}(a_1) \right| \leq \varepsilon,$$

c'est très exactement la continuité de $f_{a,1}$ en a_1 .

□

B Dérivées partielles (premières)

Définition 1

Soit f une application définie sur un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on dit que f **admet une $k^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a** (ou bien qu'elle est **dérivable par rapport à x_k en a**) lorsque la $k^{\text{ème}}$ application partielle de f , $f_{a,k}$, est dérivable en a_k , i.e. ssi

$\lim_{t \rightarrow a_k} \frac{f_{a,k}(t) - f_{a,k}(a_k)}{t - a_k}$ existe dans $\mathbb{R}$. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, ou f'_{x_k} , ou $\partial_k f(a)$, ou encore

$D_k f(a)$, la valeur de cette limite. Ainsi, pour $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Définition 2

Soit f une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $k \in \{1, \dots, n\}$.

Si l'application f admet une $k^{\text{ème}}$ dérivée partielle en tout point a de Ω , on appelle **$k^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f sur Ω**

l'application notée $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ou $D_k f$ définie par : $\frac{\partial f}{\partial x_k} : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \end{cases}$.

Remarques :

- En pratique, pour étudier l'existence de la $k^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en un point spécial $a = (a_1, \dots, a_n)$, on fixe $x_i = a_i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, et l'on étudie la dérivabilité au point a_k de l'application ainsi obtenue.
- Dans le cas de deux (resp. trois) variables, on note $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$, ou $f'_x, f'_y (f'_z)$
ou $\partial_1 f, \partial_2 f (\partial_3 f)$, ou toujours $D_1 f, D_2 f (D_3 f)$ les dérivées partielles de f .

••• **Attention** donc aux sens différents attribués à la lettre x dans l'expression $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$: Il est vital de comprendre ce point.

Proposition (opérations sur les dérivées partielles)

Soient f et g deux applications définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que f et g admettent des dérivées partielles selon x_k au point a , pour un certain $k \in \{1, \dots, n\}$.

Alors il en va de même pour $f + g$, λf , $f g$, et :

$$1 \quad \bullet \quad \frac{\partial (f + g)}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a).$$

$$2 \quad \bullet \quad \frac{\partial (\lambda f)}{\partial x_k}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

$$3 \quad \bullet \quad \frac{\partial (f g)}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) g(a) + f(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}(a).$$

Si de plus $g(a) \neq 0$, il en va de même pour $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$, et :

$$4 \quad \bullet \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{g} \right)}{\partial x_k}(a) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)}{g(a)^2}.$$

$$5 \quad \bullet \quad \frac{\partial \left(\frac{f}{g} \right)}{\partial x_k}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) g(a) - f(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)}{g(a)^2}.$$

Si φ est une fonction réelle (d'une variable) dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ admet une dérivée partielle selon x_k au point a , et :

$$6 \quad \bullet \quad \frac{\partial (\varphi \circ f)}{\partial x_k}(a) = \varphi'(f(a)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

On dispose bien évidemment de résultats correspondants sur Ω tout entier.

Proof: découle des règles de dérivation chez les fonctions réelles d'une variable réelle.

Exercice type :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Etudier l'existence des dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Wichtig : l'exemple précédent montre qu'une application peut tout à fait admettre toutes les dérivées partielles possibles en un point sans y être continue !
Seules les applications partielles sont dérivables, donc continues...

C (Vecteur) Gradient d'une application en un point

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. On appelle **vecteur gradient de f au point a** le

vecteur noté $\nabla(f)(a)$ défini par :

$$\nabla(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Le vecteur gradient est aussi noté $\overrightarrow{\nabla(f)}(a)$, $\nabla f(a)$, ∇f_a ou $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(a)$.

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(f, g) \in (C^1(\Omega, \mathbb{R}))^2$, et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. Alors :

- 1 • $\nabla(\lambda f + g)(a) = \lambda \nabla(f)(a) + \nabla(g)(a)$.
- 2 • $\nabla(fg)(a) = f(a) \cdot \nabla(g)(a) + g(a) \cdot \nabla(f)(a)$.

Si de plus $g(a) \neq 0$,

- 3 • $\nabla\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{\nabla(g)(a)}{g(a)^2}$.
- 4 • $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) \cdot \nabla(f)(a) - f(a) \cdot \nabla(g)(a)}{g(a)^2}$.

D Applications de classe C^1

Définition 1

Soit f une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que **f est de classe C^1 sur** lorsque pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, f admet une $k^{\text{ème}}$ dérivée partielle **continue** sur Ω . On note alors $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.



« continue » s'entend ici au sens des fonctions de plusieurs variables...

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(f, g) \in (C^1(\Omega, \mathbb{R}))^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $f + g$, λf et fg appartiennent

aussi à $C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Il en va de même de $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ lorsque g ne s'annule pas sur Ω .

Proof: découle immédiatement des règles de calcul sur les dérivées partielles, et des théorèmes sur la continuité des fonctions de plusieurs variables.

Proposition 2

- Les applications polynomiales de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

- Les fonctions rationnelles de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur leur domaine de définition, i.e. partout où leur dénominateur ne s'annule pas.

Proposition 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors : $C^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset C^0(\Omega, \mathbb{R})$.

Proof: voir plus tard, dans l'étude des développements limités d'ordre 1...

E Développement limité à l'ordre 1 d'une application en un point

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$.

On dit que f **admet un développement limité à l'ordre 1 au point A** lorsque :

$$\exists (\alpha_k)_{k \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0 / \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in B_o(A, r) \cap \Omega,$$

$$f(X) = f(A) + \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - a_k) + \|X - A\| \varepsilon(X - A),$$

$$\text{avec } \lim_{U \rightarrow 0} \varepsilon(U) = 0.$$



On note cela comme toujours un $DL_1(A)$ de f .



S'il existe, un tel développement est **unique**.

Proposition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe C^1 sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. $\|\cdot\|$

désigne ici une norme quelconque (why ?) sur $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une application ε de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0, \text{ et vérifiant pour tout } H \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A + H \in \Omega :$$

$$f(A + H) = f(A) + \langle \nabla f(A) | H \rangle + \|H\| \varepsilon(H),$$

ou encore

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) h_k + \|H\| \varepsilon(H).$$

Autrement dit, f admet un développement limité à l'ordre 1 au point A donné par les formules ci-dessus.

Corollaire

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors : $C^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset C^0(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarques

- Soit φ l'application définie par :

$$\forall H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \varphi(H) = f(A) + \langle \nabla f(A) | H \rangle = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) h_k$$

$f(A)$ et les $\frac{\partial f}{\partial x_k}(A)$ sont des réels, donc φ est une **fonction affine**, de la forme : $H \mapsto \alpha + \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k$.

On dit que φ est la **fonction affine tangente à f en A** .

- En posant $A = (a_1, \dots, a_n)$ et $A + H = X = (x_1, \dots, x_n)$, le $DL_1(A)$ de f s'écrit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_n) (x_k - a_k) + \|H\| \varepsilon(H)$$

$$\text{L'ensemble : } \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_n) (x_k - a_k) + \|H\| \varepsilon(H) \right\}$$

est appelé **l'hyperplan affine tangent en A au graphe de f** .

Cette notion généralise la notion de tangente en A au graphe de f vue pour les fonctions d'une seule variable.

F Différentielle d'une application en un point, notation différentielle

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$.

On appelle **différentielle de f au point A** la forme linéaire notée df_A ou $df(A)$, définie par :

$$df(A) : \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ H = (h_1, \dots, h_n) & \mapsto & [df(A)](H) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) h_k \end{matrix}$$

On note : $[df(A)](H) = df(A) \cdot H$.

Remarque

On peut alors définir la **différentielle de f** , application **linéaire** qui au vecteur A associe $df(A)$.

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. Si $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire

canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on a : $\forall H \in \mathbb{R}^n$,

$$\underline{[df(A)](H) = df(A) \cdot H = \langle \nabla f(A) | H \rangle = \nabla f(A) \cdot H}.$$

Notation différentielle

Les physiciens, chimistes et autres ont pris la (mauvaise) habitude de désigner la différentielle de f en A sous la forme :

$$df(A) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) dx_k.$$

Se donner la différentielle revient donc à se donner toutes les dérivées partielles de f en A . Achtung ! C'est juste une notation !!

III Extrema

A Définitions et théorème général d'existence

Définitions 1

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$, f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}$.

- On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **global** (ou **absolu**) en A si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{D}, f(X) \leq f(A) \text{ (resp. } f(X) \geq f(A) \text{)}.$$

- On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **local** (ou **relatif**) en A

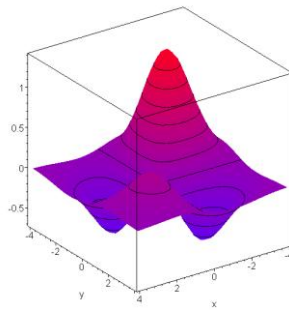
si et seulement si il existe un voisinage $V = B_0(A, r)$ de A tel que :

$$\forall X \in V \cap \mathcal{D}, f(X) \leq f(A) \text{ (resp. } f(X) \geq f(A) \text{)}.$$

- Un **extremum** est un minimum ou un maximum.

- Un extremum est dit **strict** lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes si $X \neq A$.

 Un minimum, des minima. Un maximum, des maxima. Un extremum...



On dispose en tout et pour tout d'un **unique résultat d'existence** d'extrema globaux :



Théorème 1 (des bornes atteintes)

Soit K une partie **fermée** et **bornée** de $\mathbb{R}^n$, et $f \in C(K, \mathbb{R})$. Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Ainsi, f admet forcément (au moins) un minimum et (au moins) un maximum sur K .

B Conditions nécessaires d'extrémalité des applications de classe C^1

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$, f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, et $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}$.

On suppose que f admet en A des dérivées partielles selon toutes ses variables.

On dit que A est un **point critique** de f lorsque : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) = 0$.

Il revient clairement au même de dire que $\nabla f(A) = 0$.



Théorème fondamental (condition nécessaire d'extrémalité à l'ordre 1)

Soit Ω un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ et f une **application de classe C^1** de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors :

Un extremum local (donc un extremum global *a fortiori*) de f est un point critique de f .

Autrement dit, **si** f présente un extremum local (ou global) en $A \in \Omega$, **alors** :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) = 0, \text{ ou encore, of course : } \nabla(f)(A) = 0.$$

Conséquence pratique

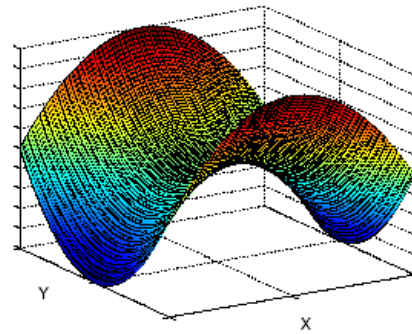
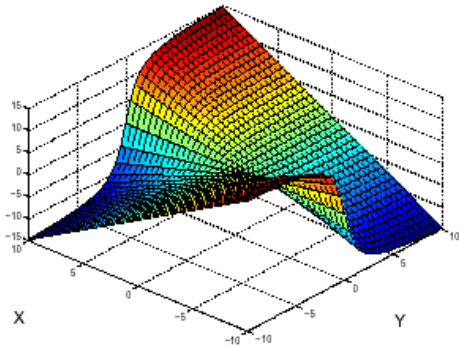
La première étape de la détermination des extrema d'une fonction de plusieurs variables de classe supérieure à 1 est la détermination de ses points critiques. Les **éventuels extrema** de f ne peuvent en effet figurer **que** parmi ces points-là d'après ce qui précède...

Extrema & points cols

MALHEUREUSEMENT POUR VOUS, la condition **nécessaire** donnée ci-dessus n'est pas suffisante, comme le prouve l'étude en $(0, 0)$ de l'application $f : (x, y) \mapsto x y$; $(0, 0)$ est un point critique évident de cette application, mais ce n'est pas un extremum local, puisque toute boule centrée à l'origine contient des points en lesquels $f(x, y) > 0$, et des points en lesquels $f(x, y) < 0$:

Définition 2

Un point critique de f qui n'est pas un extremum de f est appelé **point col** ou encore **point selle** de f .



Remarques importantes

- Une étude locale au voisinage d'un point critique ne peut permettre que de statuer sur la nature locale de ce point critique : point col, ou extremum **local**. Si l'on veut savoir si l'extremum ainsi détecté est **global**, il faut encore étudier ensuite la quantité $f(X) - f(A)$, pour $X \in \mathcal{D}_f$. **Il n'y a pas de méthode générale pour cela**, tout dépend de la bouille de la fonction, il n'y a plus qu'à suivre l'énoncé, ou à se dém...r.
- La condition générale d'existence d'extrema globaux est valable sur un **fermé borné**.
La condition nécessaire donnée ci-dessus est valable sur un **ouvert**. Si l'on travaille sur une partie non ouverte, il ne faudra pas oublier d' **examiner à part** les points situés sur la **frontière** du domaine. *Voir exercices...*
- Nous verrons un peu plus tard une condition suffisante d'extrémalité : cf. Paragraphe V.

IV Différentiation des applications composées

A Composition des applications de classe C^1

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$, et $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose

$\omega = \{t \in \mathbb{R} / A + tU \in \Omega\}$ (on remarque que ω contient nécessairement un intervalle ouvert centré en 0).

On définit une application g sur ω par : $\forall t \in \omega$, $g(t) = f(A + tU) = (f \circ u)(t)$, où $u(t) = A + tU$.

Alors, g est dérivable sur ω , et pour tout $t \in \omega$, on a : $g'(t) = \langle \nabla f(A + tU) | U \rangle$,

i.e. si $U = (u_1, \dots, u_n)$:

$$g'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(A + tU) \cdot u_k.$$

 C'est une généralisation de la formule de dérivation d'une application composée vue pour les fonctions d'une variable réelle.

Proposition 2 (dérivée d'une application de la forme $t \mapsto f(u(t), v(t))$)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v deux applications de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I, (u(t), v(t)) \in \Omega.$$

Soit φ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in I$, $\varphi(t) = f(u(t), v(t))$.

- Si u et v sont dérivables en un certain $t \in I$, alors φ est aussi dérivable en t , et l'on a la relation (*) :

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \cdot v'(t).$$

- Si $(u, v) \in (C^1(I, \mathbb{R}))^2$, alors $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, sa dérivée étant alors, *of course*, donnée par la relation (*).

Proposition 3 : dérivée d'une application de la forme $t \mapsto f(u_1(t), \dots, u_n(t))$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $(u_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ n applications de I dans $\mathbb{R}$

telles que : $\forall t \in I$, $(u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \Omega$.

Soit φ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(t) = f(u_1(t), \dots, u_n(t))$.

- Si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, l'application u_k est dérivable en un certain $t \in I$, alors φ est aussi dérivable en t ,

et :

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u_1(t), \dots, u_n(t)) \cdot u_k'(t). \quad (*)$$

- Si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $u_k \in C^1(I, \mathbb{R})$, alors $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, sa dérivée étant alors *of course* donnée par la relation (*).

B Dérivées partielles d'une application composée : cas général

Proposition (Règle de la chaîne)

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $(u_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ n applications de U dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_p) \in U, (u_1(X), \dots, u_n(X)) \in \Omega.$$

On se permettra d'appeler u l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie par $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Soit ψ l'application de U dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall X = (x_1, \dots, x_p) \in U$,

$$\psi(X) = f(u_1(X), \dots, u_n(X)) = (f \circ u)(X), \quad (\text{i.e. } \underline{\psi = f \circ u}).$$

Alors :

- Soit $k \in \{1, \dots, p\}$. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application u_k admet une dérivée partielle par rapport à la k ème variable en un certain $X = (x_1, \dots, x_p) \in U$, alors ψ admet aussi une dérivée partielle par rapport à

la k ème variable en $X = (x_1, \dots, x_p)$, et :

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(u_1(X), \dots, u_n(X)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(X)}, \quad (*)$$

où pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à sa i ème variable.

- Si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_k \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors $\psi \in C^1(U, \mathbb{R})$, ses dérivées partielles étant alors *of course* données par la relation $(*)$.

Remarques :

- On a vu que dans la notation $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, le symbole y_i est muet (il désigne juste la dérivée partielle de f par rapport à sa i ème

variable). Si on se permet l'abus d'écriture de l'appeler $\boxed{u_i}$, on arrive à la formule suivante, plus facilement mémorisable :

$$\boxed{\forall k \in \{1, \dots, p\}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}(u(X)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(X)}. \quad (**)$$

- D'autres préféreront peut-être la formule écrite avec la notation ∂_i pour la dérivée partielle par rapport à la i ème variable :

$$\boxed{\forall k \in \{1, \dots, p\}, \partial_k \psi(X) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(u(X)) \cdot \partial_k u_i(X)}. \quad (***)$$

- Le choix entre $(*)$, $(**)$ et $(***)$ est juste une affaire de goût, les trois formules étant équivalentes. Le tout est d'arriver à en mémoriser une, de préférence en la comprenant...

Preuve

On fixe $X = (x_1, \dots, x_p) \in U$, et $k \in \{1, \dots, p\}$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$v_i(t) = u_i(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_p)$. Comme U est un ouvert, les fonctions $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont toutes définies

(au moins) sur un intervalle ouvert contenant x_k . Soit alors $F : t \mapsto f(v_1(t), \dots, v_n(t))$. Le théorème sur la dérivation des fonctions de cette forme nous dit que F est dérivable en x_k , et que :

$$F'(x_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(v_1(x_k), \dots, v_n(x_k)) \cdot v_i'(x_k). \quad (1)$$

Mais pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$: $v_i(x_k) = u_i(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) = u_i(X)$. (2)

Par ailleurs, et par définition d'une dérivée partielle, on a, toujours pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$v_i'(x_k) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(X), \quad (3)$$

puisque v_i n'est autre que la $k^{\text{ème}}$ application partielle de l'application u_i .

En réinjectant (2) et (3) dans (1), on obtient alors que : $F'(x_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(u_1(X), \dots, u_n(X)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(X)$. (4)

Il n'y a plus qu'à remarquer que, par définition de la $k^{\text{ème}}$ dérivée partielle de l'application ψ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(X) = \frac{\partial (f \circ u)}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p) = F'(x_k), \quad (5)$$

puisque F n'est autre que la $k^{\text{ème}}$ application partielle de l'application $\psi = f \circ u$.

En réinjectant dans (4), on obtient la relation (*) de l'énoncé du théorème. $\square$

Exemple type à savoir reproduire (passage en coordonnées polaires) :

Soit F une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

par : $G(\rho, \theta) = F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Exprimer les dérivées partielles de G en fonction de celles de F , et le contraire.

C Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles

Proposition

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Alors, f est constante sur Ω si et seulement si toutes ses dérivées partielles y sont nulles.

Exercice type (résolution d'équations aux dérivées partielles) :

On souhaite déterminer toutes les applications $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

On considère l'application $\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (u, v) = (2x + y, y) \end{pmatrix}$.

Q1_ Montrer que Φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer sa bijection réciproque Ψ .

Q2_ On pose $g = f \circ \Psi$. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

En considérant la première application partielle de g en (u, v) , à savoir $g_1 : t \mapsto g(t, v)$, montrer

que $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ existe, et l'exprimer à l'aide de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Q3_ Exprimer de même $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

En déduire une équation aux dérivées partielles simples satisfaite par g .

Q4_ Résoudre cette équation aux dérivées partielles. En déduire g , puis f .

Q5_ Conclure.

V Dérivées d'ordre supérieur

1. Dérivées partielles secondes

Définition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$.

Soit $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$. On suppose que l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie au voisinage de A .

Si cette application $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet en A une dérivée partielle (première) par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ variable (x_j) , on dit

que f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x_i et x_j au point A . On la note alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right)(A), \text{ ou } \boxed{\partial_{i,j}^2 f(A)}.$$

Remarques

- 1
• Il y a donc p^2 dérivées partielles secondes possibles.
- 2
• Lorsque $i = j$, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(A)$ au lieu de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(A)$.
- 3
• Pour $p = 2$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{h} \right]$, et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{k} \right].$$

De même, compléter :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b-h)}{2h} \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(a, b) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a-h, b)}{2h} \right].$$

- 4 • On désigne bien entendu comme toujours par $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ l'application définie par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) \end{cases}.$$

- 5 • On note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$

2. Applications de classe C^2

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est de classe C^2 sur Ω , et l'on note $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ lorsque les p^2 applications dérivées

partielles secondes de f , $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq p}$, existent et sont continues sur Ω . Ce qui revient à dire que :

$$\underline{f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})} \text{ et que : } \underline{k \in \{1, \dots, p\}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})}.$$

Proposition 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Alors, $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ stable pour le produit.

Le résultat **essentiel** – **fondamental** sur les applications de classe C^2 est le théorème suivant :



Théorème (d'interversion) de Schwarz (admis)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, et $A = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$.

Si f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ **continues** en A , alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A).$$

C'est le cas *en particulier* (en tout point A de Ω) lorsque f est de classe C^2 sur Ω .

3. Hessienne



Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe C^2 sur Ω , et $A \in \Omega$.

On appelle *matrice hessienne* ou *Hessienne* de f en A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée

$H_f(A)$ définie par :

$$H_f(A) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$



Théorème de Schwarz (bis)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe C^2 sur Ω , et $A \in \Omega$.

La Hessienne $H_f(A) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de f au point A est une

matrice **symétrique réelle**, donc **diagonalisable**.

Exercice sans intérêt pour l'instant – type n°1 :

On reprend l'exemple de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + xy + yz + x^2 y^3 z \end{pmatrix}.$$

Q1_ Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

Q2_ Ecrire la Hessienne en tout point de $\mathbb{R}^3$.

4 développement limité à l'ordre 2

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, et

$$A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega.$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 au point A lorsque :

$$\exists (\alpha_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n, \exists (\beta_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \exists V \in \mathcal{V}(A) /$$

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in V \cap \Omega,$$

$$f(X) = f(A) + \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - a_k) + \sum_{i \leq j} \beta_{i,j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \|X - A\|^2 \varepsilon(X - A)$$

$$\text{avec } \lim_{U \rightarrow 0} \varepsilon(U) = 0.$$

Formule de Taylor – Young à l'ordre 2



Proposition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe C^2 sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, et

$$A = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega. \|\cdot\| \text{ désigne ici une norme quelconque sur } \mathbb{R}^n.$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 au point A donné par :

$$\exists V \in \mathcal{V}(\overline{0}), \exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 / \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in V :$$

$$f(A + h) = f(A) + \nabla f(A)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(A) h + \|h\|^2 \varepsilon(h),$$

i.e.

$$f(A + h) = f(A) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) h_k + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) h_i h_j + \|h\|^2 \varepsilon(h),$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Exercice débile type :

Soit f définie l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^4 + y^4 + z^4 + x^3 y + y^3 z + z^3 x \end{pmatrix}.$$

Q0_ Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Q1_ Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point $A = (1, 0, 1)$.

5. Dérivées partielles d'ordre k

Définition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, et $A = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$.

Les dérivées partielles successives de f sont définies par la récurrence suivante :

- La définition des dérivées partielles d'ordre 1 a été donnée en début de chapitre.

- • Pour $k \geq 2$ et pour $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, p\}^k$, $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ est la

fonction $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$. Elle est définie là où $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ est définie, et dérivable par rapport à

la x_{i_k} - ème variable.

L'application f est dite de classe C^k lorsque ses dérivées partielles d'ordre k sont définies et continues sur Ω .

L'ensemble des fonctions de classe C^k sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est noté $C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarques et propriétés

- S'il y a des répétitions, on abrège les notations comme on l'a fait pour des dérivées partielles d'ordre 2 :

par exemple, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}$ est notée $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}$. En revanche et autre exemple, on ne peut pas écrire que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial^2 x_1}, \text{ sauf à justifier l'intervention (en appliquant le théorème de Schwarz à } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{).}$$

- • $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, stable par produit.
- • • On a montré en début de chapitre qu'une application de classe C^1 est continue. En appliquant ce résultat aux dérivées successives de f , on en déduit qu'une application de classe C^k est de classe C^r , pour tout $r \in \{0, \dots, k\}$.

6. Conditions suffisantes d'extrémalité à l'ordre 2

Les *conditions suffisantes* que nous allons donner concernent des applications *de classe C^2* .



Théorème fondamental (condition suffisante d'extrémalité locale)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une application de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \in \Omega$ un **point critique** de f .

On considère la matrice hessienne $H_f(A)$ de f en A .

- Si la Hessienne $H_f(A)$ est **définie positive**,

i.e. si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}, {}^t X \cdot H_f(A) \cdot X > 0$, resp si

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}, {}^t X \cdot H_f(A) \cdot X < 0$,

alors f présente en A un **minimum local strict** (resp. **maximum local strict**).

Autrement dit...

•• Si $\text{Sp}(H_f(A)) \subset \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\text{Sp}(H_f(A)) \subset \mathbb{R}_-^*$),

alors f présente en A un **minimum local strict** (resp. **maximum local strict**).

7. Conditions suffisantes d'extrémalité à l'ordre 2, cas de la dimension 2

En dimension 2, les conditions suffisantes d'extrémalité à l'ordre 2 peuvent se traduire de la façon suivante :

Théorème (condition suffisante d'extrémalité locale en dimension 2)

Soit Ω un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$, et f une **application de classe C^2** de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit $A \in \Omega$ un **point critique** de f .

On considère la matrice hessienne $H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$ de f en A .

• Si $\det(H_f(A)) > 0$, alors f présente en A un **extremum local local**.

Cet extremum local est un minimum local strict si $\text{Tr}(H_f(A)) > 0$, et c'est un maximum local strict si $\text{Tr}(H_f(A)) < 0$.

•• Si $\det(H_f(A)) < 0$,

alors f présente en A un **point col**.

••• Si $\det(H_f(A)) = 0$, on ne peut rien dire de général.

Exercice type n° 1 :

Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x \end{pmatrix}$.

Q1_ Déterminer les extrema locaux de f .

Q2_ Ces extrema sont-ils globaux ?

Exercice type n° 2 :

Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \\ (x, y, z) & \mapsto 5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xz \end{pmatrix} \mathbb{R}$, et $A \in \mathbb{R}^3$.

Q1_ Déterminer la matrice Hessienne de f au point A .

Q2_ Déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Q3_ En déduire que l'application f admet un unique minimum local, à préciser.

Q4_ Montrer que ce minimum est en fait un minimum global.

Exercice type n° 3 :

Soit $\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1 \}$, et l'application

$$f : \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{D}} & \rightarrow \\ (x, y) & \mapsto 3x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 3y + 2 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Q1_ Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$, et le représenter graphiquement.

Q2_ Montrer que l'application f admet un minimum et un maximum.

Q3_ Déterminer les extrema de la restriction de f à l'ouvert

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1 \} ?$$

Q4_ Déterminer les extrema de f , et les points où ils sont atteints.