



2025 - 2026

PC

Feuille d'exercices

Calcul différentiel

Exercice 1

Etudier la continuité en $(0, 0)$ des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\text{a_} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\text{c_} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Exercice 2

$$\text{Soit } h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{h(y) - h(x)}{y - x} & \text{si } x \neq y \\ h'(x) & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Montrer que f est continue (on rappellera l'égalité des accroissements finis).

Exercice 3

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera, et vérifiant :

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = yx^2 \end{cases} & 2. \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5f(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3f(x, y) \end{cases} \\ 3. \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} & 4. \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \end{cases} \end{array}.$$

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ à l'aide du changement de variable

$$(x, y) = \left(u, v e^{-\frac{u}{2}} \right).$$

Exercice 5

Une preuve de l'équivalence des normes en dimension finie

Partie I Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On désigne comme toujours par $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini sur $\mathbb{R}^n$, définie par :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|X\|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |x_k|,$$

et l'on travaille dans l'espace $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

1. Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \leq \beta \|X\|_\infty$.

hint On pourra décomposer les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. En déduire que $\|\cdot\|$ est continue de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3. Soit $S = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X\|_\infty = 1\}$.

a. Montrer que l'application $\|\cdot\|$ admet un minimum α sur S .

b. Montrer que $\alpha > 0$.

c. En déduire que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \alpha \|X\|_\infty \leq \|X\|$.

4. Que peut-on conclure quant aux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$?

5. Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Partie II *Equivalence des normes en dimension finie*

Soit maintenant E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \sum_{k=1}^n x_k e_k \end{cases}.$$

6. Soit $\mathcal{N}$ une norme sur E . Montrer que $\mathcal{N} \circ \Phi$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

7. Soient enfin $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ deux normes sur E . Montrer que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes.

Exercice 6

$$\text{Soit } f \text{ l'application définie sur } \mathbb{R}^2 \text{ par : } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Montrer que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ définies sur $\mathbb{R}^2$, mais que celles-ci ne sont pas continues en $(0, 0)$.

Exercice 7

Etudier la continuité, l'existence de dérivées partielles d'ordre 1, et le caractère C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ des applications de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\text{a. } f(x, y) = \begin{cases} x y \ln(|x| + |y|) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$\text{b. } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Exercice 8

Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$, de norme associée $\| \cdot \|$.

Soit f une application de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, **convexe**, i.e. telle que :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)f(X) + \lambda f(Y).$$

Cette relation est appelée **inégalité de convexité** de l'application f .

Pour tout couple $(H, X) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on définit la fonction $\varphi_{H, X}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{H, X}(t) = f(X + tH).$$

- 1.a. Montrer que $\varphi_{H, X}$ est une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que l'application $\varphi_{H, X}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi_{H, X}'$.
- c. En déduire que : $\varphi_{H, X}'(0) \leq \varphi_{H, X}(1) - \varphi_{H, X}(0)$.
2. Montrer que : $\forall (U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle \nabla f(U) | V - U \rangle \leq f(V) - f(U)$.
3. Soit X_0 un point critique de f . Montrer que f admet un minimum global en X_0 .

Exercice 9

Fonctions positivement homogènes

A

Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite **positivement homogène de degré α** sur $\mathbb{R}^n$ ssi :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

1. Donner des exemples d'applications positivement homogènes de degrés -2 , et 1 .
2. Que peut-on dire d'une application positivement homogène de degré 0 ?
3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Montrer que si f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
4. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Montrer que f est positivement homogène de degré α sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle vérifie l'équation d'Euler :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

On pourra introduire l'application $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \varphi(t) = f(tx_1, \dots, tx_n) \end{pmatrix}$.

B

A l'aide de A, on souhaite déterminer toutes les applications $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}. \quad (*)$$

5. Déterminer une solution positivement homogène f_0 de $(*)$.

6. Montrer que f est solution de $(*)$ si et seulement si $g = f - f_0$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

7. Montrer alors que g est nécessairement constante, et conclure.

Exercice 10

Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positive, convexe et de dérivée strictement négative.

- Montrer que $x \mapsto e^{-t}$ vérifie ces hypothèses.
- soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + h'(x)$.
 - Montrer que g est strictement décroissante, et vérifier que $g(0) < 0$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution. On la notera α .
- Soit f l'application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à (x, y) associe $x^2 - 2xy + 2y^2 + h(x)$.
 - Montrer que $(\alpha, \frac{\alpha}{2})$ est l'unique point critique de f .
 - Montrer que f admet un extremum local, et déterminer sa nature.
- Soit $\phi : ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' - xy' - x'y + 2yy'$.
 - Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
 - Montrer que : $\exists k > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2xy + 2y^2 \geq k(x^2 + y^2)$.
- Montrer que l'extremum de f est global.

Exercice 11

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - y^2$. Soit l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = 0\}$.

- Montrer que h est de classe C^1 , et que $(0, 0)$ est son seul point critique.
La fonction h admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?
- soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et telle que $f(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in C$.
 - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t^2, t^3) = 0$.
 - En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
- Soit $\phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto f(t^2, u)$.
Justifier que ϕ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in]-t^3, t^3[$ tel que $\phi'(t) = 0$.
- Conclure que $(0, 0)$ est un point critique pour f .
- Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C .

Exercice 12

Pour tout réel a différent de 0 et de $-\frac{1}{2}$, on définit la fonction f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2) e^y.$$

- Calculer les dérivées partielles premières de f_a .
- En déduire que f_a possède deux points critiques, et donner leurs coordonnées.
- Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a , f_a présente en ce point un extremum local.

- b. Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R}^2$ un maximum global ou un minimum global, et donner sa valeur en fonction de a .

Exercice 13

Déterminer toutes les applications $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{cases} \Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

vérifie sur Ω la relation : $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 , et soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y > 0\}.$$

On suppose qu'il existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$dF = f(x + y)(y^2 dx + x^2 dy).$$

1. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire la fonction f , à une constante multiplicative près.
3. Déterminer alors, en fonction de cette constante, la fonction F .

Exercice 15

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \quad (1)$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \Phi(x, y) = (x, y + x^2)$.

1. En déterminant son application réciproque, montrer que Φ est bijective.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On pose $g = f \circ \Phi$.

Montrer que f est solution de (1) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que f est solution de (1) si et seulement si il existe

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u, v) = h(v - u^2).$$

Exercice 16

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit a un réel non nul donné. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\Omega(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial y}.$$

1. Montrer que Ω définit un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Ker } \Omega$ en posant $u = x$ et $v = y - ax$.
3. Déterminer $\Omega^n(f)$ à l'aide des dérivées partielles successives de f .

Exercice 17

1. Montrer que $(x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{x}{y}\right)$ est une bijection C^1 de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vers $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
 2. Déterminer les fonctions $f \in C^2\left((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
-

Exercice 18

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $(E) : \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right) f^2 - x^2 - y^2 = 0$.

Exercice 19

Soit $f : (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto f(x, y) = x \ln y + y \ln x$.

- a. Montrer que $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ est un point critique de f .
 - b. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $(0, 0)$ de $f\left(\frac{1}{e}(1+x), \frac{1}{e}(1+y)\right)$.
 - c. f présente-t-elle en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ un minimum local ? Un maximum local ?
 - d. f présente-t-elle en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ un minimum global ? Un maximum global ?
-

Exercice 20

On pose $\varphi : \begin{cases} \left(\mathbb{R}_+^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$

- a. Montrer que φ est de classe C^1 et bijective.
 - b. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et $g = f \circ \varphi$. Que peut-on dire de g ?
 - c. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
 - d. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $(E) : -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
-

Exercice 21

Soit $f : \begin{cases} [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1-x^2} \cos y \end{cases}$.

On remarquera que f est continue sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$.

- a. Déterminer les points critiques de f sur $[0, 1[\times [0, \pi]$.
- b. Calculer $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right) - f(x, y)$. f présente-t-elle en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$ un maximum global ?
- c. Quel est le signe de $f(0, y) - 1$?
Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto f(x, \pi)$.
 f présente-t-elle en $(0, \pi)$ un extremum local ?
- d. f présente-t-il en $(0, 0)$ un minimum global ?

e. Soit $y_0 \in [0, \pi]$. f présente-t-elle en $(1, y_0)$ un extremum local ?

On distinguera les cas : $y_0 < \frac{\pi}{2}$, $y_0 > \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 22

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Montrer que l'application $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection de $[0, 1]$ dans lui-même.

2. On note M la matrice 3×3 dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que M est diagonalisable.

Déterminer son spectre, puis celui de $M + I_3$.

3. Soit $D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 < 1 \right\}$.

a. Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que la fonction $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^n + x_2^n + x_3^n + (1 - x_1 - x_2 - x_3)^n$ est de classe C^2 , et calculer ses dérivées partielles.

4.a. Montrer que le seul point critique de f est $a = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$.

b. Calculer la Hessienne de f en a , et en déduire que f admet un minimum local strict en a .

5. Montrer que f présente en a un minimum global strict.

6. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires et de même loi, à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = X_2 = \dots = X_n) \leq \frac{1}{4^{n-1}}$.

Exercice 23

a) Déterminer les fonctions $y \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, y'(t) - y(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$.

b) Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y + f(x, y)$.