Lycée Lakanal

2025- 2026

Des preuves à connaître

Notes :

- ***La liste ci-dessous ne prétend pas être indiscutable. Elle n'est pas exhaustive, le principe général étant que toute preuve qui n'a pas été signalée non exigible ou hors programme est exigible.***
- ***Les carrés rouges signalent des preuves qui me semble prioritaires (c'est assez discutable là aussi). Ils sont plutôt orientés écrits de concours, pour l'oral certaines priorités peuvent changer.***
- ***Certaines preuves sont rappelées. Pour les autres, cf. le cours…***

Chapitres préliminaires

Fonctions usuelles, ensembles, dénombrements (première année)

Propriétés des images directes ou réciproques

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.

- Soient A et B deux parties de F. Alors $f^{-1}(A \cup B) = \left(f^{-1}(A)\right) \cup \left(f^{-1}(B)\right)$.

On a le résultat analogue pour des intersections.

- Soient U et V deux parties de E. On a $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ et $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$.

Formules de base du dénombrement

Le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p vers un ensemble de cardinal n est égal à n^p.

Si E est un ensemble de cardinal n, le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n.

Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Preuve des deux premiers points :

Soit E de cardinal p et F de cardinal n. Construire une application f de E vers F revient à choisir, pour chacun des p éléments de E, son image par F. Il y a n choix possibles pour cette image, et ce indépendamment de ce que l'on choisit pour les autres éléments de E. Il y a donc n^p applications de E vers F.

Notons $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Choisir une partie A de E revient à choisir une application de E vers $\{0,1\}$ (associant 0 à un élément x de E si $x \notin A$, et 1 si $x \in A$). Il y a 2^n applications de E vers $\{0,1\}$, d'où $\text{card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n$.

Formule du binôme (preuve par dénombrement)

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{K}$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$.

Lorsque l'on développe $(x+y)^n = \underbrace{(x+y).(x+y)....(x+y)}_{n \text{ facteurs}}$, on obtient une somme de la forme

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k y^{n-k}$, où α_k représente le nombre de façons de choisir k facteurs égaux à x et $n-k$ facteurs égaux à y. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir, parmi les n facteurs, k fois le terme x. Ceci étant réalisé, il n'y a plus qu'un choix pour les facteurs y (on prend tous les autres). Ainsi, $\alpha_k = \binom{n}{k}$, ce qui démontre la formule du binôme de Newton.

Remarque

La preuve par récurrence de la formule du binôme doit également être connue ; elle ne présente pas de difficulté.

Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors, $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Idées : expliciter $P^{(k)}$, faire une interversion de sommes et utiliser la formule du binôme.

On note $P = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$. Alors pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $P^{(k)} = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} b_j X^{j-k}$,

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{k!(j-k)!} b_j a^{j-k} (X-a)^k$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} b_j a^{j-k} (X-a)^k ,$$

et la formule du binôme permet de conclure.

Deux propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

On a pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

On a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Etudier la fonction associée $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ou $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$.

Multiplicité d'une racine (caractérisation).

α est racine de multiplicité m de P si et seulement si : $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Par définition, dire que α est racine de multiplicité m de P revient à dire qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Le résultat est ensuite immédiat en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes.

Suites

Théorème des suites adjacentes □

$\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors ces deux suites convergent, et ont même limite.

Supposons par exemple que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est, parmi ces deux suites, celle qui est croissante. Alors $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée (par v_0), donc converge vers une limite ℓ. De même, $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et minorée, converge vers une limite ℓ'.

L'égalité $\ell = \ell$' découle immédiatement du fait que $\lim\left(v_n - u_n\right) = 0$.

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ □

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$. Alors :

- Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue, ℓ est (après prolongement par continuité de f en ℓ s'il le faut) un point fixe de f.
- •• Si f est croissante, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
- ••• Si f est décroissante, $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires.

• Passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$. •• Supposons par exemple $u_0 \geq u_1$. En composant cette inégalité par $f^n = \underbrace{f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ qui est croissante, il vient $f^n\left(u_0\right) \geq f^n\left(u_1\right)$, soit $u_n = u_{n+1}$, ainsi $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même si $u_0 \leq u_1$, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. ••• La suite $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $u_{2(n+1)} = \left(f\circ f\right)\left(u_{2n}\right)$. Comme $f\circ f$ est croissante, $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, supposons-là par exemple croissante. Pour tout n, $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$. En composant par f décroissante, on obtient $u_{2n+1} \geq u_{2(n+1)+1}$, et la suite $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Suites arithmético – géométriques (à redémontrer sur tout exemple rencontré)

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = a\,u_n + b$, avec $a \neq 1$. Soit λ la solution de l'équation $X = a\,X + b$. Alors la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \lambda$ est a – géométrique.

Déterminants

Calcul d'un déterminant de Vandermonde □

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}\left(a_j - a_i\right).$$

Preuve par récurrence. Pour l'hérédité : on suppose le résultat vrai au rang $n-1$, et l'on pose

$$P(X)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^{n-1} \end{vmatrix}$$. Ensuite, cf. le cours.

Calcul d'un déterminant triangulaire par blocs

Soient p, n deux entiers tels que $0 < p < n$. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Soit T la matrice triangulaire par blocs définie par : $T=\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(T)=\det(A)\det(D)$.

Preuve : cf. le cours

Algèbre linéaire

Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f)=\{0\}$.

Preuve :

Déjà, puisque f est linéaire, $f(0)=0$. Donc si f est injective, $\text{Ker}(f)=\{0\}$. Réciproquement, si $\text{Ker}(f)=\{0\}$: pour tout $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x)=f(y)$: $f(x-y)=0$, donc $x-y \in \text{Ker}(f)$, d'où $x-y=0$: $x=y$, et f est injective.

Propriétés des projecteurs □

Soit p un projecteur de E. Alors : • $\text{Im}\, p \oplus \text{Ker}\, p = E$, •• $\text{Im}\, p = E_1(p)$ et $\text{Ker}\, p = E_0(E)$.

- Le premier point se prouve avec le raisonnement d'analyse-synthèse de base, il faut impérativement savoir le faire.

Soit $x \in E$.

Analyse

Supposons que x s'écrive sous la forme $x = x_I + x_K$, avec $x_I \in \text{Im}\, p$ et $x_K \in \text{Ker}\, p$.

Alors par linéarité, $p(x)=p(x_I)+p(x_K)$ $\quad(1)$.

Comme $x_K \in \text{Ker}\, p$, $p(x_K)=0$. D'autre part, $x_I \in \text{Im}\, p$, donc il existe $z \in E$ tel que $p(z)=x_I$; on a donc $p(x_I)=p^2(z)=p(z)$, soit : $p(x_I)=x_I$.

(1) devient alors : $p(x)=x_I$, et, comme $x=x_I+x_K$, l'on en déduit que $x_K=x-p(x)$.

Synthèse

Réciproquement, posons $x_I=p(x)$ et $x_K=x-p(x)$. Il est évident que $x_I \in \text{Im}\, p$, et que $x=x_I+x_K$. Enfin, $p(x_K)=p(x)-p^2(x)=0$, $x_K \in \text{Ker}\, p$.

Cette analyse-synthèse prouve que tout élément x de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\text{Im}\, p$ et d'un élément de $\text{Ker}\, p$, on a donc bien $\text{Im}\, p \oplus \text{Ker}\, p = E$

•• Le second point est sans difficulté.

Formule de Grassmann

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E.

Alors, $\dim\left(F + G\right) = \dim F + \dim G - \dim\left(F \cap G\right)$.

Partir d'une base $\left(e_1, ..., e_p\right)$ de $F \cap G$. La compléter, d'une part en $\left(e_1, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_q\right)$ base de F, et d'autre part en $\left(e_1, ..., e_p, v_{p+1}, ..., v_r\right)$ base de G. Alors, $\left(e_1, ..., e_p, u_{p+1}, ..., u_q, v_{p+1}, ..., v_r\right)$ est une base de $F + G$, ce qui donne : $\dim\left(F + G\right) = p + \left(q - p\right) + \left(r - p\right) = \dim F + \dim G - \dim\left(F \cap G\right)$.

Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, avec E de dimension finie. Alors, $\dim\left(E\right) = \operatorname{rg}\left(f\right) + \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f\right)\right)$.

On considère un supplémentaire H de $\operatorname{Ker}\left(f\right)$ dans E. f réalisant un isomorphisme de H vers $\operatorname{Im} f$, on a $\dim H = \operatorname{rg}\left(f\right)$, soit $\dim E - \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f\right)\right) = \operatorname{rg}\left(f\right)$.

Familles de polynômes échelonnés en degré

Soit $\left(P_0, ..., P_n\right)$ une famille de polynômes échelonnés en degrés. Alors, cette famille est libre.

On note $p = \deg\left(P_n\right)$. On a $\deg\left(P_0\right) < \deg\left(P_1\right) < ... < \deg\left(P_n\right)$, donc $\left(P_0, ..., P_n\right)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_p\left[X\right]$. La matrice des coordonnées de la famille $\left(P_0, ..., P_n\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p\left[X\right]$ est immédiatement échelonnée, et libre.

Matrices symétriques et antisymétriques □

On a $\mathcal{A}_n\left(\mathbb{K}\right) \oplus \mathcal{S}_n\left(\mathbb{K}\right) = \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ et $\dim\left(\mathcal{A}_n\left(\mathbb{K}\right)\right) = \dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$, $\dim\left(\mathcal{S}_n\left(\mathbb{K}\right)\right) = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

Il faut également savoir donner une base de $\mathcal{A}_n\left(\mathbb{K}\right)$ et de $\mathcal{S}_n\left(\mathbb{K}\right)$.

Rang d'une composée □

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et $v \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, $u \in \mathcal{L}\left(F, G\right)$

Alors, $\operatorname{rg}\left(u \circ v\right) \leq \min\left(\operatorname{rg}\left(u\right), \operatorname{rg}\left(v\right)\right)$.

Il suffit de prouver que $\operatorname{Im}\left(u \circ v\right) \subset \operatorname{Im}\left(u\right)$ d'une part, que $\operatorname{Ker}\left(u \circ v\right) \supset \operatorname{Ker}\left(v\right)$ et d'utiliser le théorème du rang d'autre part.

Propriétés de la trace

- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}\left(\mathbb{K}\right)$, alors $\operatorname{tr}\left(A\,B\right) = \operatorname{tr}\left(B\,A\right)$.
- Conséquence : deux matrices (carrées) semblables ont même trace.

Il est moins vital, mais également bon, de savoir prouver que :

Trace et formes linéaires (HP mais courant)

Pour toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right), \mathbb{K}\right)$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ telle que f soit l'application $M \mapsto \operatorname{tr}\left(A\,M\right)$.

Hyperplans et formes linéaires (HP mais courant)

- Les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles.

- Deux formes linéaires non nulles sont colinéaires si et seulement si elles ont le même noyau.

Caractérisation des sommes directes via les dimensions

Soient $F_1, ..., F_p$ des sous – espaces vectoriels de dimension finie de E.

On a $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\left(F_i\right)$, avec égalité ssi la somme est directe.

Stabilité d'un sev par un endomorphisme, et matrices par blocs.

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}\left(E\right)$, et F un sous – espace vectoriel de dimension (finie) $p \in \left\{1, ..., n-1\right\}$. Soit maintenant $\mathcal{B}_F = \left(e_1, ..., e_p\right)$ une base de F, complétée en une base $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n\right)$ de E.

Alors : F est u – stable $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}\left(u\right) = \begin{pmatrix} A_{(p)} & B_{(p,n-p)} \\ O_{(n-p,p)\,(n-p,p)} & D_{(n-p)} \end{pmatrix}$,

i.e. :

F est u – stable si, et seulement si, la matrice de u dans une base adaptée à F est triangulaire par blocs.

On doit savoir démontrer tout ce qui concerne les polynômes interpolateurs de Lagrange :

Polynômes interpolateurs de Lagrange : □

On considère $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts $a_0, ..., a_n$.

Pour tout $i \in \left\{0, ..., n\right\}$, posons $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Alors :

- $\left(L_i\right)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est l'unique famille de polynômes de $\mathbb{K}_n\left[X\right]$ telle que :

  Pour tout $\left(i, j\right) \in \left\{0, ..., n\right\}^2$, $L_i\left(a_j\right) = \delta_{i,j}$.

- •• La famille $\left(L_0, ..., L_n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n\left[X\right]$.

- ••• Pour tout $b = \left(b_0, ..., b_n\right) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P_b à coefficients dans $\mathbb{K}$ et tel que $\begin{cases} \deg\left(P_b\right) \leq n \\ \forall\, i \in \left\{0, ..., n\right\},\ P_b\left(a_i\right) = b_i \end{cases}$. Ce polynôme est donné par $P_b = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

- •••• Pour tout $\mathbb{K}_n\left[X\right]$, on a : $P = \sum_{i=0}^{n} P\left(a_i\right) L_i$.

Les polynômes L_i sont appelés ***polynômes interpolateurs de Lagrange*** associés à la famille $\left(a_0, ..., a_n\right)$.

Les sous – espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe

Tout est dans le titre...

Endomorphismes commutant et stabilité de sous – espaces

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

u, v commutent $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\left(u\right)$, $\mathrm{Im}\left(u\right)$, et les sous-espaces propres de u sont v – stables.

Endomorphismes commutant et co – diagonalisabilité (hors-programme mais bon à savoir faire) □

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v commutent et sont diagonalisables.

Alors, u et v sont diagonalisables dans une même base.

Polynômes annulateurs

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$. Alors, les valeurs propres de f sont parmi les racines de P.
- Si $(X - a)Q$ est annulateur de f et si $Q(f) \neq 0$, alors a est valeur propre de f.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, E evdf : f est diagonalisable ssi f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Note : privilégier les démonstrations sur des exemples simples plutôt que dans le cas général. Par exemple, pour le troisième point : savoir prouver que si $(X - a)(X - b)(X - c)$ est annulateur de f avec a, b, c distincts, alors f est diagonalisable.

Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, la dimension de $E_\lambda(u)$ est inférieure ou égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_u.

Démonstration plutôt pour les concours Mines, Centrale a priori.

Caractérisations de la diagonalisabilité

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n.

Alors, u est diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = n \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim\left(E_\lambda(u)\right) = m_\lambda$,

où m_λ est la multiplicité de λ comme racine de χ_u.

Une condition suffisante de diagonalisabilité

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n, admettant n valeurs propres distinctes. Alors, u est diagonalisable.

Algèbre bilinéaire

Inégalité de Cauchy – Schwarz + cas d'égalité □

Soient x, y deux vecteurs de $\left(E, \langle | \rangle\right)$ préhilbertien. Alors :

$\langle x \mid y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, et il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si x et y sont liés.

Le cas $x = 0$ est trivial. Si x est non nul, considérer que $P : \lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2$ est un polynôme de degré 2 en λ, de signe constant et donc de discriminant négatif ou nul.

Inégalité triangulaire pour une norme euclidienne

Une norme euclidienne vérifie bien l'inégalité triangulaire.

Développer : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$; il suffit ensuite de majorer $\langle x, y\rangle$ grâce à l'inégalité de Cauchy – Schwarz.

Formes linéaires et produit scalaire (pas du cours, mais à savoir faire)

Soit E euclidien. Alors, pour toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique vecteur a de E tel que f soit l'application $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle a, x\rangle \end{array} \right.$.

Il suffit de prouver que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a \mapsto \varphi_a \end{array} \right.$ est linéaire injective, et de remarquer que $\dim E = \dim\left(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})\right)$.

Procédé de Gram – Schmidt

Soit $\left(E, \langle . \mid . \rangle\right)$ un espace préhilbertien. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_p)$ une famille **libre** de vecteurs de E.

Soit $\mathcal{G} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ la famille de vecteurs définie par :

- $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, et
- $\forall k \in \{2, ..., p\}$, $\varepsilon_k = \dfrac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k \mid \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k \mid \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i \right\|}$.

Alors :

i – $\mathcal{G}$ est une famille orthonormale de E.

ii – $\mathcal{G}$ est l'unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ de E vérifiant :

$$\forall k \in \{1, ..., p\},\ \mathrm{Vect}\left\langle (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)\right\rangle = \mathrm{Vect}\left\langle (e_1, ..., e_k)\right\rangle, \text{ et}$$

$$\forall k \in \{1, ..., p\},\ \langle \varepsilon_k \mid e_k\rangle \in \mathbb{R}_+^*.$$

Elle est dite déduite de $\mathcal{F}$ par le **procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt**.

Note : il faut savoir prouver avant tout le point *i*. L'unicité (point *ii*) est moins fondamentale.

Bien entendu, savoir citer ce résultat et l'appliquer est bien plus important que savoir le démontrer.

Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous – espace vectoriel de $\left(E, \|\ \|\right)$ préhilbertien. Soit $x \in E$. Alors la distance $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ de x à F est atteinte en un unique point y_0 de F : $d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\|$ et

$\exists ! y_0 \in F,\ \|x - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Ce point y_0 est $p_F(x)$, le projeté orthogonal de x sur F.

Partir de la caractérisation du projeté orthogonal : $y_0 = p_F(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0 \in F \\ \|x - y_0\| \perp F \end{array} \right.$. Il suffit d'écrire que pour tout y de F, $\|x - y\|^2 = \|(x - y_0) + (y_0 - y)\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2$ pour en déduire le résultat : pour tout $y \in F$, $\|x - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2$, et il y a égalité si et seulement si $y = y_0$.

Caractérisations des projecteurs orthogonaux □

Soit p un projecteur de E euclidien.

- p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme autoadjoint.
- p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall\ x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Isométrie $\Leftrightarrow$ conservation du produit scalaire.

Soit u un endomorphisme de E euclidien. Alors u est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si u conserve le produit scalaire, ie si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Rappelons qu'isométrie est synonyme d'automorphisme orthogonal : dire que u est une isométrie revient à dire que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Moyennant quoi, $\Leftarrow$ est trivial, et $\Rightarrow$ facile avec une identité de polarisation.

Stabilité de l'orthogonal d'un sev stable par une isométrie ou un endomorphisme autoadjoint □

Soit u une isométrie (ie. un automorphisme orthogonal) de E euclidien.

Alors pour tout sous espace vectoriel F de E : F est $u-$ stable $\Leftrightarrow$ $F^{\perp}$ est $u-$ stable .

On a le même résultat lorsque u est un endomorphisme autoadjoint.

u symétrique (c'est-à-dire auto-adjoint) $\Leftrightarrow$ Mat(u) symétrique

Soit u un endomorphisme de E euclidien, et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

Alors, u est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Sur les matrices symétriques positives , définie positives. □

Une matrice carrée réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive lorsque :

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^{\mathsf{T}} A X \geq 0 .$$

On a les résultats suivants :

- $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
- Pour toute matrice réelle A (*carrée ou non*), $A^{\mathsf{T}} A$ est une matrice symétrique positive.

De même, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dit définie positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^{\mathsf{T}} A X > 0$, et :

- $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
- Pour toute matrice réelle carrée inversible A , $A^{\mathsf{T}} A$ est une matrice symétrique positive.

Espaces vectoriels normés

Les questions posées sur ce chapitre sont en général très proches du cours.

Soit E un espace vectoriel normé.

Convexité des boules

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est convexe.

Union d'ouverts, intersections de fermés.

Toute union d'ouverts de E, toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection de fermés, toute réunion finie de fermés est un fermé.

Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé

Là encore tout est dans le titre...

Les applications lipschitziennes sont continues

Idem.

Ouverts, fermés et images réciproques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f : E \to \mathbb{R}$ continue.

Alors $\{ x \in E,\ f(x) > 0 \}$ est un ouvert de E ; $\{ x \in E,\ f(x) = 0 \}$, $\{ x \in E,\ f(x) \geq 0 \}$ sont des fermés de E.

Dérivée de $L \circ f$

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \to F$ de classe C^1 et $L \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $L \circ f$ est C^1, et $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Continuité, dérivation, intégration (première année)

Il faut savoir démontrer tous les théorèmes « star » d'analyse de première année, et surtout :

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors pour tous $a < b$ éléments de I :

Pour tout $y \in \overrightarrow{[f(a), f(b)]}$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Preuve : par dichotomie.

Théorème des extrema locaux

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $c \in I$.

On suppose que f admet un extremum local en c.

Alors si c n'est pas une borne de I, $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle □

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$. On suppose que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve : si f est constante sur $[a, b]$, c'est évident. Sinon, f admet sur le segment $[a, b]$ un maximum M et un minimum m distincts l'un de l'autre, donc l'un au moins d'entre eux est différent de $f(a) = f(b)$; il est donc atteint en un point c de $]a, b[$, et, d'après le théorème des extrema locaux, on a $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis □

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

Cette preuve importante. Son idée est simple : considérer $\varphi : x \mapsto f(b) - f(x) - (b - x) K$ avec K tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$, et appliquer à φ le théorème de Rolle.

Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions définies et de classe D^n sur I. Alors la fonction produit fg est de classe D^n sur I, et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve par récurrence, analogue à celle de la formule du binôme.

Théorème fondamental du calcul intégral (ou théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a un point de I, et soit $F : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$. Alors :

- F est une primitive de f sur I.
- Les primitives de f sur I sont les fonctions qui diffèrent de F d'une constante.

Preuve du premier point : soit b un point de I. Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [b - \eta, b + \eta] \cap I$, $|f(x) - f(b)| \leq \varepsilon$. Pour tout $x \in [b - \eta, b + \eta] \cap I$, on a :

$F(x) - F(b) = \displaystyle\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$, d'où $\left|F(x) - F(b) - (x - b) f(b)\right| = \left|\displaystyle\int_b^x f(t) - f(b)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon |x - b|$.

Ceci assure que $F(x) - F(b) - (x - b) f(b) \underset{b}{=} o(x - b)$, ou encore que F est dérivable en b, et que $F'(b) = f(b)$.

Une fonction continue positive d'intégrale nulle sur un segment est identiquement nulle sur ce segment.

Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On ne donne ici que l'énoncé dans le cas particulier $[a, b] = [0, 1]$, mais on peut toujours s'y ramener.

La preuve n'est exigible que dans le cas où f est de classe C^1. Cette preuve peut facilement être demandée. Idée de départ, la formule de Taylor avec reste intégral donne, en notant F une primitive de f :

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k+1}{n} - t\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On somme, on télescope à gauche, et, à droite, on majore le reste intégral en utilisant $|f'|$ bornée ; le résultat s'ensuit.

Formule de Taylor avec reste intégral □

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx .$$

Preuve facile, par récurrence et intégrations par parties

Séries

Une condition nécessaire de convergence

Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.

Règle de d'Alembert (cf. le chapitre séries entières)

Divergence de la série harmonique. Equivalent de ses somme partielles. Constante gamma. □

Convergence ou divergence d'une série de Riemann

La convergence absolue implique la convergence simple

Idée : supposer que $\sum |u_n|$ converge. Poser $u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geq 0 \\ 0 \text{ si } u_n < 0 \end{cases}$, $u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leq 0 \\ 0 \text{ si } u_n > 0 \end{cases}$, remarquer que

$u_n = u_n^+ - u_n^-$ et que $0 \leq u_n^{\pm} \leq |u_n|$, ce qui assure la convergence des séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$.

Dualité suite/série

La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Télescopage sans difficulté.

Comparaison série/intégrale.

Seule la **technique** de comparaison est au programme, les deux résultats ci-dessous ne le sont donc pas. Mais il faut savoir

Il faut savoir démontrer le théorème fondamental :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq a+1$, et $f \in C_{mx}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que l'application f est **décroissante** et **positive**.

Alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ converge.

et son corollaire, le théorème de comparaison série/intégrale proprement dit : □

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq a+1$, et $f \in C_{mx}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que l'application f est **décroissante** et **positive**.

Alors la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Théorème spécial des séries alternées □

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

i – La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

ii – $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Alors,

1_ ***Convergence des séries alternées***

$\sum (-1)^n u_n$ converge.

2_ ***Signe et majoration du reste***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$, et $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}$.

Autrement dit, le reste d'ordre n est du signe de son premier terme, et il est majoré en valeur absolue par son premier terme.

3_ ***Encadrement de la somme par les sommes partielles***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$.

Preuve (en recopiant ce qu'en dit le poly de cours) :

Le principe est simple : introduire la suite $\left(S_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n u_n$, et montrer que les suites extraites $\left(S_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(S_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. La suite est sans difficulté...

Séries de fonctions

CVN $\Rightarrow$ CU $\Rightarrow$ CS

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On a la double implication :

$\sum f_n$ converge normalement sur I $\Rightarrow$ $\sum f_n$ converge uniformément sur I

$\Rightarrow$ $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Preuves des théorèmes « techniques » concernant les séries de fonctions :

interversion limite/intégrale ; dérivation d'une limite ; continuité d'une somme ; dérivation terme à terme ; intégration terme à terme, SONT au programme. Savoir citer correctement ces résultats, et les appliquer en pratique, est de loin plus important.

Fonction zêta de Riemann $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ **continuité, dérivabilité, équivalent au voisinage de** 1^- **(pas un résultat inscrit dans le programme, mais à savoir faire).** □

Séries entières

Lemme d'Abel

Soit ρ un réel strictement positif. Si la suite $\left(a_n \rho^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$:

- $a_n z^n = O\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$.
- La série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Règle de d'Alembert

Soit $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite telle que :

i – $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$\exists\, n_1 \geq n_0\,,\ \forall\, n \geq n_1\,,\ u_n \neq 0\ ;$$

ii – $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- • Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente.

Comparaison de rayons de convergences □

On a $a_n = O\left(b_n\right) \Rightarrow \left(\text{RC de } \sum a_n z^n\right) \geq \left(\text{RC de } \sum b_n z^n\right)$

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

De manière générale, il faut savoir prouver tout ce qui a été fléché « critères de bon sens » dans le cours. Celui indiqué ici est souligné par le programme officiel, et permet de retrouver les autres.

Une série entière converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence

Enoncé encore une fois dans le titre.

Et en prime :

- La définition du rayon de convergence.
- Rayon de convergence de la série dérivée
- La fonction somme d'une série entière est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Assurez – vous que vous savez prouver un DSE usuel...

Intégration (de deuxième année)

Critère de Riemann

La convergence absolue implique la convergence.

Intégrale de Dirichlet □

$t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Résultat et preuve non inscrits au programme, mais il faut savoir prouver en particulier la convergence : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre, et on prouve la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par intégration par parties (on dérive $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et on intègre $t \mapsto \sin t$).

Les théorèmes de convergence dominée

Les preuves des « grands » théorèmes concernant les intégrales à paramètre sont, soit hors – programme, soit (ce qui revient un peu au même) non exigibles. Aucune preuve notable ne me paraît prioritaire dans ce chapitre. En revanche, savoir citer impeccablement/appliquer ces théorèmes, et déjà savoir prouver une convergence d'intégrale, est une priorité !

Fonction Gamma d'Euler $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{t} \, \mathrm{d}t$ **: continuité, dérivabilité, valeur de** $\Gamma(n)$ **pour** $n \in \mathbb{N}$ **, (pas un résultat inscrit dans le programme, mais à savoir faire).** □

Espaces probabilisés

Théorèmes de continuité croissante, de continuité décroissante □

Appelés également théorèmes de limites monotones pour les probabilités :

Cas croissant

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements de $\mathcal{T}$, *i.e.* telle que : $\forall \, n \in \mathbb{N}, \; A_n \subset A_{n+1}$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(A_N) \; .$$

Cas décroissant

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements de $\mathcal{T}$, *i.e.* telle que : $\forall \, n \in \mathbb{N}, \; A_{n+1} \subset A_n$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(A_N) \; .$$

Inégalité de Boole

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ converge :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) \; .$$

Note : il ne me semble pas que les preuves des trois théorèmes ci – dessus puissent être demandées à E3A ou CCINP. A contrario, que celles – ci ou des variations d'icelles interviennent dans un sujet de type Mines ou Centrale, ne serait pas bien étonnant.

Variables aléatoires

Les preuves ci – dessous sont fréquemment demandées (exception faite de l'approximation binomiale par Poisson, qu'il faut plus savoir énoncer que savoir prouver... même si ladite preuve est un bon exercice de maniement d'équivalents).

Espérance par antirépartition □

Si X est une vard à valeurs dans $\mathbb{N}$, X possède une espérance ssi $\sum \mathbb{P}(X \geq n)$ converge, et dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Partir de $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1)$ et de sommes partielles ; vous trouverez la suite dans le cours, et les feuilles d'exercice...

Inégalité de Markov □

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$.

Alors pour tout $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

Inégalité de Bienaymé – Tchebychev □

Soit X une variable aléatoire admettant une variance $\mathbb{V}(X)$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Inégalité de Cauchy – Schwarz pour les variables aléatoires, version 1 □

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant chacune un moment d'ordre deux. Alors :

- $(\mathbb{E}(X,Y))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$.
- •• De plus, $(\mathbb{E}(X,Y))^2 = \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$ si et seulement si les var X et Y sont quasi – sûrement liées, autrement dit ssi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda X + \mu Y = 0$ presque sûrement.

Inégalité de Cauchy – Schwarz pour les variables aléatoires, version 2

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant chacune un moment d'ordre deux. Alors :

- $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}$.

  Autrement dit, lorsque les variances de X et Y sont non nulles :

  $$|\rho(X,Y)| \leq 1.$$

- •• De plus, $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si les variables X et Y sont quasi – sûrement affinement liées, autrement dit ssi il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Y = \lambda_0 X + b$ presque sûrement.

Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$, et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$;
- •• La suite $(n p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel λ strictement positif.

Alors : $$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Loi faible des grands nombres

Soit $\left(X_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, admettant une espérance commune μ et une variance commune σ^2.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

Fonction génératrice, espérance, variance des lois usuelles □

Vérifiez que vous savez démontrer ce qui concerne ce point – là.

Pour finir, quelques mots sur le dernier chapitre de deuxième année :

Géométrie différentielle

Dans ce chapitre, on vous demandera certes de savoir citer et utiliser correctement le cours, mais assez rarement de refaire les démonstrations.