



Résumé de cours de première année

2026 - 2027

Rappels d'analyse fonctionnelle

I LIMITES ; CONTINUITÉ

I.1. Limites

I.1.a. Les définitions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, ou une réunion d'intervalles de ce type, et f une fonction définie sur I . Soit a un point de I ou une borne de I , avec éventuellement $a = \pm \infty$, et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$.

On dit que f admet pour limite ℓ en a , et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, lorsque :

ℓ	a	Définition
réel	réel	$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, x - a \leq \alpha \Rightarrow f(x) - \ell \leq \varepsilon$
réel	$+\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, x > A \Rightarrow f(x) - \ell \leq \varepsilon$
réel	$-\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, x < -A \Rightarrow f(x) - \ell \leq \varepsilon$
$+\infty$	réel	$\forall B > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, x - a \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq B$
$-\infty$	réel	$\forall B > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, x - a \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq -B$
$+\infty$	$+\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$
$-\infty$	$-\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, x \leq -A \Rightarrow f(x) \leq -B$
$-\infty$	$+\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow f(x) \leq -B$
$+\infty$	$-\infty$	$\forall B > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, x \leq -A \Rightarrow f(x) \geq B$

On peut résumer tout ceci en écrivant que, de manière générale,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ lorsque, pour tout voisinage V_ℓ de ℓ dans $\mathbb{R}$, il existe un

voisinage V_a de a dans I tel que : $\forall x \in I, x \in V_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell$.

I.1.b. Limites usuelles

Limites usuelles en 0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 .$$

Croissance comparée

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x} = 0 .$$

Formes indéterminées

$$\left(+\infty \right) - \left(+\infty \right) ; \frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; 0 \times \infty ; 0^0 ; 1^\infty ; \left(+\infty \right)^0 .$$

I.1.c. Les théorèmes

I.1.c.1 Théorème de la limite monotone

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction réelle, I intervalle. Soient a la borne inférieure de I , et b sa borne supérieure.

Premier cas : on suppose f croissante. Alors :

- f admet en a une limite à droite $\ell_d(a) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Cette limite est finie si et seulement si f est minorée.
- f admet en b une limite à gauche $\ell_g(b) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cette limite est finie si et seulement si f est majorée.
- En tout point c de $]a, b[$, f admet une limite à gauche $\ell_g(c) \in \mathbb{R}$ et une limite à droite $\ell_d(c) \in \mathbb{R}$, et l'on a : $\ell_g(c) \leq f(c) \leq \ell_d(c)$.

Deuxième cas : on suppose f décroissante. Alors :

- f admet en a une limite à droite $\ell_d(a) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cette limite est finie si et seulement si f est majorée.
- f admet en b une limite à gauche $\ell_g(b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Cette limite est finie si et seulement si f est minorée.
- En tout point c de $]a, b[$, f admet une limite à gauche $\ell_g(c) \in \mathbb{R}$ et une limite à droite $\ell_d(c) \in \mathbb{R}$, et l'on a : $\ell_g(c) \geq f(c) \geq \ell_d(c)$.

I.1.c.2. Convergence par encadrement

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une borne de I , et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

- i – Les fonctions f et h admettent toutes deux pour limite ℓ en a ;
- ii – Pour tout $x \in I$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe, et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Cas d'une limite infinie

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ un point de I ou une borne de I .

1. On suppose que :

- i – $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, et ii – Pour tout $x \in I$: $f(x) \leq g(x)$.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe, et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

De même :

2. On suppose que :

- i – $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$; et ii – Pour tout $x \in I$: $g(x) \leq f(x)$.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe, et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

I.1.c.2. Caractérisation séquentielle d'une limite

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de I , et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- i – La fonction f admet en a une limite égale à ℓ .
- ii – Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell.$$

I.2. Continuité

I.2.a. Définition

Une fonction $f : I \rightarrow J$ est dite continue en $a \in I$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

I.2.b. Les théorèmes

I.2.b.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un **intervalle** I . Alors :

Versión 1 : L'image de I par f est un intervalle.

Versión 2 : Pour tous $a < b$ éléments de I :

Pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Versión 3 : Pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Variante : le TVI strict

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I , **continue** et **strictement monotone**. Alors :

Pour tous $a < b$ éléments de I :

Pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe un **unique** $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

I.2.b.2 Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I , **continue** et **strictement monotone**. Alors

- i – f réalise une bijection de I dans $f(I)$.
- ii – f^{-1} est continue, strictement monotone, de même monotonie que f .

I.2.b.3. Théorème des bornes atteintes

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$.

Alors l'image de $[a, b]$ par f est un **segment** $[m, M]$.

(m est alors le minimum de f sur $[a, b]$, et M son maximum).

Le théorème s'énonce également sous la forme plus concise, mais plus faible, suivante :

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

II DÉRIVATION

II.1. Premières propriétés

II.1.a. Quelques règles de dérivation

$$\begin{aligned} (f \circ g)' &= (f' \circ g) \times g' ; & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{g f' - f g'}{g^2} ; & \left(\frac{1}{f}\right)' &= -\frac{f'}{f^2} ; \\ (f^n)' &= n f^{n-1} \times f' ; & \left(\frac{f}{g^n}\right)' &= \frac{g f' - n f g'}{g^{n+1}} ; & \left(\frac{1}{f^n}\right)' &= -n \frac{f'}{f^{n+1}} . \end{aligned}$$

II.1.b. Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

Soit $f : I \rightarrow J$ une application définie sur un **intervalle** I , **bijective** et **dérivable**.

Soit $b \in J$. Alors :

i – f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.

ii – Lorsque cette condition est remplie, on a : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

II.1.c. Théorème des extrema locaux

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Soit $c \in I$.

On suppose que f admet un extremum local en c .

Alors : si c n'est pas une borne de I , $f'(c) = 0$.

II.2. Théorème de Rolle, théorème et inégalité des accroissements finis

II.2.a. Théorème de Rolle

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, et **dérivable** sur $]a, b[$, avec $a < b$. On suppose que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

II.2.b. Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, et **dérivable** sur $]a, b[$, avec $a < b$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

II.2.b. Inégalité accroissements finis

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, et **dérivable** sur $]a, b[$, avec $a < b$.
Alors $|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|$.

En particulier

Soit f une fonction **de classe** C^1 sur un **segment** $[a, b]$. Soit m le minimum de f' sur $[a, b]$, et soit M son maximum.
Alors : $(b - a)m \leq f(b) - f(a) \leq (b - a)M$.

II.3. Prolongement C^1

II.3.a. Théorème de prolongement C^1 , version 1

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et a un point de I .
On suppose f dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$. Alors :

- Si f' admet une limite finie en a , f est dérivable en a , et
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$
 Remarquons que f' est alors continue en a .
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm \infty$, alors f n'est pas dérivable en a .

De plus, la courbe représentative de f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

- Pas de conclusion lorsque f' n'admet pas de limite en a : dans ce cas, f peut être ou ne pas être dérivable en a .

II.3.b. Théorème de prolongement C^1 , version 2

Soient I un intervalle, a un point de I , et f une fonction de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$.

On suppose que :

- i – f admet une limite finie en a .
- ii – f' admet une limite finie en a .

Alors

- On peut prolonger f en une fonction $\overline{f}$ de classe C^1 sur I , en posant

$$\overline{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

- On a : $\overline{f}'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

II.4. Convexité

II.4.a. Définition – inégalité de convexité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est convexe sur I lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- i – On a pour tout $(x, y) \in I^2$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- ii – On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, et pour tout

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

On dit que f est concave lorsque la fonction $-f$ est convexe.

II.4.b. Convexité et régularité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Si f est convexe sur I , elle y est continue.
- On suppose f dérivable sur I . Alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I .
- On suppose f deux fois dérivable sur I . Alors f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .

II.5. Dérivées successives – développements limités

II.5.a. Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions définies et de classe D^n sur I . Alors,

La fonction produit $f g$ est de classe D^n sur I , et :

$$(f g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

II.5.b. Formule de Taylor – Young

Soit f une fonction de classe D^n un intervalle I .

Soit x_0 un point de I .

Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

II.4.c. Intégration et dérivation de développements limités

En résumé :

- On peut toujours intégrer terme à terme un DL à l'ordre n ; on obtient alors un DL à l'ordre $n + 1$ de la primitive choisie (celle qui correspond au terme

constant du nouveau DL).

- En revanche, on ne peut dériver terme à terme un DL à l'ordre n que si l'on sait que la fonction étudiée est n fois dérivable ; dans ce cas, on obtient le DL à l'ordre $n - 1$ de la fonction dérivée au point considéré.

II.4.d. Développements limités usuels

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) ; \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) ;$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^n).$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \text{ (un } o(x^{2n+2}) \text{ convient aussi)}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k!} x^k + o(x^n), \text{ ou encore :}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \quad \bullet \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n), \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

II.5. Formules de Taylor – Lagrange et Taylor – Laplace

II.5.a. Formule et inégalité de Taylor – Lagrange

La formule (hors – programme, mais à savoir démontrer)

Soit f une fonction de classe C^n sur un segment $[a, b]$ ($a < b$), et $n + 1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

L'inégalité

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$ ($a \leq b$).

Soit $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

II.5.b. Formule de Taylor – Laplace, ou Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx.$$

III INTÉGRATION

III.a. Inégalité de la moyenne

Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur un segment non vide.

$$\text{Alors} \quad \left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(t)| dt.$$

III.b. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$). Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

En particulier

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

III.c. Inégalité intégrale de Cauchy – Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right).$$

III.d. Changements de variable

Soit φ une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$, et soit f une fonction continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

III.e. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t) \cdot v(t) dt = [u(t) \cdot v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) \cdot v'(t) dt.$$