



2026 - 2027

PC

Séries numériques

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS

1. La notion de série

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1 (série numérique ; sommes partielles d'une série)

- On appelle **série de terme général** u_n , notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$, le couple de suites $\left((u_k)_{n \geq n_0}, \left(\sum_{k=n_0}^n u_k \right)_{n \geq n_0} \right)$.
- S'il n'y a pas d'ambiguïté quant à son indice initial, la même série pourra également être notée $\sum u_n$.
- Pour tout $N \geq n_0$, la somme $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$ est appelée **somme partielle d'ordre** N de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Définition 2 (nature, somme d'une série)

- On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_N)_{N \geq n_0} = \left(\sum_{n=n_0}^N u_n \right)_{N \geq n_0}$ de ses sommes partielles est convergente. Dans ce cas, on note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite de cette suite, et on l'appelle **somme de la série** $\sum_{n \geq n_0} u_n$.
- Ainsi, la somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est définie si et seulement la suite $\left(\sum_{n=n_0}^N u_n \right)_{N \geq n_0}$ admet une limite finie, et, lorsque tel est le cas, cette somme est donnée par

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=n_0}^N u_n \right).$$
- Lorsque la suite $\left(\sum_{n=n_0}^N u_n \right)_{N \geq n_0}$ n'admet pas de limite, ou admet une limite infinie, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est dite **divergente**.
- Déterminer la **nature** d'une série, c'est prouver sa convergence ou sa divergence.

2. Premières propriétés

i – linéarité

- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries convergentes, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ converge, et $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n \geq n_0} u_n + \sum_{n \geq n_0} v_n$.
- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, et si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ diverge.



Bien sûr, on ne peut rien dire de général quant à la nature de $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + v_n)$ lorsque $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ divergent toutes deux...



Il découle de du résultat précédent que, si l'on note $E(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge,

$E(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et l'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace, ie. une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$).

ii – Convergence d'une série de terme général complexe

Soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de terme général complexe.

Alors, $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq n_0} \operatorname{Im}(u_n)$ convergent, et lorsque tel est le cas :

$$\sum_{n \geq n_0} u_n = \sum_{n \geq n_0} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n \geq n_0} \operatorname{Im}(u_n).$$

iii – Invariance de nature par troncature

Soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, et soit un entier $n_1 \geq n_0$.

Alors, les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature.

3. Restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente

i – Définition (suite des restes d'une série convergente)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série **convergente**. Pour tout $N \geq n_0 - 1$, on définit R_N , **reste d'ordre N** de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, par :

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

ii – La suite des restes, si elle est définie, converge vers 0

- Pour tout $N \geq n_0 - 1$, le reste d'ordre N de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ existe si et seulement $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série convergente.
- Lorsque tel est le cas, $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$.

iii – Restes, termes généraux, somme et sommes partielles

Considérons une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Notons (S_n) la suite de ses sommes partielles. Alors :

- $u_{n_0} = S_{n_0}$, et pour tout $n > n_0$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

 Si l'on pose $S_{n_0-1} = \sum_{n=n_0}^{n_0-1} u_n$, alors $S_{n_0-1} = 0$ (somme indexée par l'ensemble vide), et l'on a maintenant aussi

$$u_{n_0} = S_{n_0} - S_{n_0-1}.$$

Si l'on suppose de plus $\sum_{n \geq n_0} u_n$ convergente, et que l'on note $(R_N)_{N \geq n_0-1}$ la suite des restes de cette série :

- Pour tout $n \geq n_0$, $u_n = R_{n-1} - R_n$.
- Pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.

4. Sur la dualité suite/série

la **suite** $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge si et seulement si la **série** $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

II PREMIERS CRITÈRES DE CONVERGENCE

1. Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif

Proposition 1

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif à partir d'un certain rang. Alors,

- $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.
- $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Preuve : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$; le fait que u_{n+1} soit positif à partir d'un certain rang assure que, également à partir d'un certain rang, (S_n) est croissante. La proposition ci-dessus est alors une conséquence directe du théorème de la limite monotone, appliqué à la suite (S_n) .

On déduit de cette proposition les corollaires suivants :

Théorème (de comparaison pour les séries à terme général positif)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles qu'à partir d'un certain rang, l'on ait : $0 \leq u_n \leq v_n$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème (de comparaison pour les séries à terme général positif, version domination)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif. On suppose que $u_n = O(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème (de comparaison pour les séries à terme général positif, version négligeabilité)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème (de comparaison pour les séries à terme général positif, version équivalents)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques dont l'une est à termes positifs à partir d'un certain rang. On suppose que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ (ce qui assure aussi que l'autre série est à termes positifs à partir d'un certain rang).

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (i.e. convergent ou divergent simultanément).

2. Divergence grossière ; convergence absolue ou sommabilité

a. La notion de divergence grossière

Proposition (une condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général tend vers zéro, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Il découle immédiatement de cette proposition que

Toute série dont le terme général ne tend pas vers zéro est divergente.

On parle alors de série **grossièrement divergente**.



En revanche, dire qu'une série converge parce que son terme général tend vers 0, c'est dire une **énorme bêtise**, comme le montre l'exemple de la **série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$, qui est **divergente**.

Preuve

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_n) de ses sommes partielles admet une limite finie ; il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0, \text{ soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

b. Convergence absolue

Définition (série absolument convergente ; suite sommable)

Soit $\sum u_n$ une série numérique, réelle ou complexe.

On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** ssi la série $\sum |u_n|$ est convergente. Lorsque tel est le cas,

on dit également que la suite (u_n) est **sommable**, et l'on note : $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$. Dans le cas contraire, on

écrira que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = +\infty$.

Théorème (la convergence absolue implique la convergence)

Toute série absolument convergente est convergente.

De plus, si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge absolument, on a l'inégalité triangulaire : $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Preuve

Tout d'abord, la convergence d'une série, ou sa convergence absolue, ne dépend pas de ses premiers termes ; quitte à en enlever ou à en ajouter, on peut donc supposer que $n_0 = 0$. Supposons maintenant que la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Si (u_n) est à valeurs réelles

On a : $\forall n \geq n_0, u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n| = v_n - |u_n|$, où $v_n = u_n + |u_n|$.

On note que si $u_n \leq 0$, alors $v_n = 0$, et, si $u_n \geq 0$, alors $v_n = 2u_n \geq 0$. Donc dans tous les cas, $v_n \geq 0$.

Plus précisément : $\forall n \geq n_0, 0 \leq 2v_n \leq 2|u_n|$.

La série $\sum |u_n|$ converge par hypothèse. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs assure alors la convergence de la série $\sum v_n$. Mais comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - |u_n|$, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est alors convergente comme différence de deux séries convergentes. De plus :

$$\forall n \geq n_0, -|u_n| \leq u_n \leq |u_n|,$$

donc immédiatement :

$$-\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

C'est dire précisément que :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Si (u_n) est à valeurs complexes

On a pour tout $n \geq n_0$, $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$; par hypothèse, $\sum |u_n|$ converge, le théorème de comparaison permet d'en déduire que $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$ convergent. Ainsi, $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes. On est alors ramené au cas de séries de terme général réel, étudiées ci-dessus. On peut donc affirmer que $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$ sont toutes deux convergentes, et ceci entraîne la convergence de la série $\sum u_n$.

En outre : $\forall N \geq n_0, \left| \sum_{n=n_0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^N |u_n|$ par inégalité triangulaire, et l'on retrouve $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ par passage à la limite.

Remarque – définition

La réciproque de cette propriété est fautive : il existe des séries **semi-convergentes**, i.e. convergentes, mais non absolument convergentes.

Par exemple, nous savons que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, et nous verrons aussi

que la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge (sa somme valant $\ln(2)$).

On note $\ell^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$.

De façon analogue, on note $\ell^2(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont de carré sommable, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge absolument.

Munis des lois naturelles, les ensembles $\ell^1(\mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

III SÉRIES USUELLES

1. Séries géométriques

Ce sont les séries du type $\sum q^n$. Elles convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, leur convergence est

absolue, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve

Si $|q| \geq 1$, $\sum q^n$ est grossièrement divergente, donc divergente. Si $|q| < 1$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, et

$\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1} = 0$; la convergence de $\sum q^n$ s'ensuit, ainsi que l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. Séries exponentielles

Pour tout $a \in \mathbb{C}$ (donc a fortiori pour tout $a \in \mathbb{R} \dots$), la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge absolument, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$.

Preuve

Pour $a = 0$, le résultat est évident. Supposons désormais a non nul, et écrivons ce complexe sous forme exponentielle : $a = \rho e^{i\theta}$,

avec $\rho > 0$, et par exemple $\theta \in [0, 2\pi[$. Considérons l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \exp(t e^{i\theta}) \end{cases}$; f est de classe C^∞ , avec pour tout

$k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(t) = e^{ik\theta} \exp(t e^{i\theta})$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^{n+1} sur $[0, \rho]$; la

formule de Taylor avec reste intégral s'applique donc : on a $e^a = f(\rho) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \rho^k + \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

Alors, $e^a = \sum_{k=0}^n \frac{e^{ik\theta} \rho^k}{k!} + \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^n}{n!} e^{i(n+1)\theta} e^{te^{i\theta}} dt = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} + \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^n}{n!} e^{i(n+1)\theta} e^{te^{i\theta}} dt$,

d'où l'on déduit que $\left| e^a - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right| \leq \int_0^\rho \left| \frac{(\rho-t)^n}{n!} e^{i(n+1)\theta} e^{te^{i\theta}} \right| dt$, puis que $\left| e^a - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right| \leq \int_0^\rho \frac{\rho^n}{n!} e^\rho dt = \frac{\rho^{n+1}}{n!} e^\rho$.

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\rho^{n+1}}{n!} e^\rho = 0$; il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = e^a$: ceci revient à dire que $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$

converge, et que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$. La convergence est absolue, car ce qui précède s'applique également à $b = |a|$, c'est-à-dire

dire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left| \frac{a^n}{n!} \right|$ converge.

3. Séries de Riemann

Ce sont les séries du type $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Elles convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

C'est un exemple – type d'application du critère de comparaison série/intégrale : cf. le paragraphe IV ci-dessous.

IV D'AUTRES CRITÈRES DE CONVERGENCE :

Comparaison série/intégrale, règles de d'Alembert et du $n^\alpha u_n$, critère spécial des séries alternées

1. Comparaison série / intégrale

a. Une définition

Soit f **positive**, continue par morceaux sur $[a, +\infty[$; on dit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si

la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) dt$ existe et est finie. Lorsque tel est le cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) dt .$$

On remarquera que

- Pour tout $b \geq a$, pour tout $A \geq b$, $\int_a^A f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^A f(t) dt$. On en déduit que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_b^A f(t) dt \text{ existe dans } \mathbb{R} :$$

pour tout $b \geq a$, f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si elle est intégrable sur $[b, +\infty[$.

- • Puisque f est à valeurs positives, l'application $A \mapsto \int_a^A f(t) dt$ est croissante. Par conséquent : d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t) dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si l'application $A \mapsto \int_a^A f(t) dt$ est majorée. Or pour tout réel $A \geq a + 1$, on a en notant n la partie entière de A : $\int_a^n f(t) dt \leq \int_a^A f(t) dt \leq \int_a^{n+1} f(t) dt$. Il en résulte que l'application $A \mapsto \int_a^A f(t) dt$ est majorée si et seulement si la suite $\left(\int_a^n f(t) dt \right)_{n \geq a}$ l'est. Lorsque tel est le cas, comme $\left(\int_a^n f(t) dt \right)_{n \geq a}$ est une suite croissante majorée, elle converge.

En conclusion :

La fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si la suite $\left(\int_a^n f(t) dt \right)_{n \geq a}$ est majorée.

b. Théorème de comparaison série/intégrale

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq a + 1$, et f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

On suppose que l'application f est **décroissante** et **positive**.

Alors la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Preuve

Soit $n_0 = \lfloor a \rfloor + 1$. La décroissance de f assure que pour tout $k \geq n_0 + 1$:

$$\forall t \in [k-1, k], f(k) \leq f(t) \leq f(k-1).$$

On en déduit, par croissance de l'opérateur intégral, que $\int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt$, soit :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1). \text{ On en déduit que pour tout } n \geq n_0 + 1,$$

$$\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k-1), \text{ soit, avec la relation de Chasles et un petit changement}$$

$$\text{d'indice : } \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^{n+1} f(k). \text{ Maintenant :}$$

- Si la série $\sum_{k \geq n_0} f(k)$ converge, on note S sa somme, et l'on a d'après ce qui précède, par positivité de f :

$$\forall k \geq n_0 + 1, \int_{n_0}^k f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) \leq S.$$

La suite $\left(\int_{n_0}^n f(t) dt \right)_{n \geq n_0}$ est majorée, il en résulte que f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Par suite, f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

- Supposons réciproquement que f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Alors f est également intégrable sur $[n_0, +\infty[$,

et l'on a pour tout $n \geq n_0 + 1$, $\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt$. La série $\sum_{k \geq n_0+1} f(k)$ est à terme général positif et la

suite de ses sommes partielles est majorée, donc cette série converge ; il en est alors de même pour $\sum_{k \geq n_0} f(k)$.

Application 1

Convergence des séries de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ si et seulement si $\alpha > 1$.

c. Equivalent des sommes partielles si divergence, encadrement des restes en cas de convergence

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq a + 1$, et $f \in C_{mx}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que l'application f est **décroissante** et **positive**. Alors,

- Si la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ diverge, on a $\sum_{k=n_0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^n f(t) dt$.
- Si $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

Remarques

- Les résultats ci-dessus doivent systématiquement être redémontrés.
- L'encadrement $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$ permet souvent de déterminer

un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ de la série $\sum f(k)$.

Application 2

Détermination d'un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Application 3

Détermination d'un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. On a : $R_n \sim \frac{1}{n}$.

2. Comparaison à des séries usuelles

a. Comparaison à une série géométrique

Proposition (règle de d'Alembert)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle que :

i - $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, u_n \neq 0;$$

ii - $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ est une série grossièrement divergente.

Preuve

- Si $\ell > 1$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \neq 0$ et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$; alors la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$

est à valeurs strictement positives, et elle est croissante. Il en résulte que la suite (u_n) ne tend pas vers 0, et ainsi la série

$\sum u_n$ est grossièrement divergente.

- Si $\ell < 1$:

Dans ce cas, considérons un réel q tel que $\ell < q < 1$. Il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \neq 0$ et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q$. On

obtient alors par une récurrence évidente :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq |u_n| \leq \frac{|u_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n.$$

Or la série géométrique $\frac{|u_{n_0}|}{q^{n_0}} \sum q^n$ converge, puisque $|q| < 1$. D'après le théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, $\sum |u_n|$ converge.

Application 4

Montrer que la série $\sum n^2 q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Remarque : la règle de d'Alembert ne s'applique qu'à des séries dont la convergence/divergence est très rapide (au pire, de l'ordre de celle d'une série géométrique). Chercher à l'appliquer dans des cas plus complexes serait irréaliste.

b. Comparaison à une série de Riemann

Proposition (règle du $n^\alpha u_n$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha |u_n|$ admet une limite finie, alors $\sum u_n$ converge absolument.
- S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n$ admet une limite (finie ou infinie) non nulle, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque

L'existence d'un réel $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha |u_n|$ admet une limite non nulle ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$ (on ne peut que dire qu'elle ne converge pas absolument).

Preuve

- Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha |u_n| = \ell$. Alors la suite $(n^\alpha |u_n|)_{n \geq 1} = \left(\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^\alpha}} \right)_{n \geq 1}$

est bornée, on a donc, d'après le critère du quotient : $|u_n| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, puisque $\alpha > 1$; le théorème de comparaison pour les séries de terme général positif permet d'en conclure que $\sum |u_n|$ converge, et que $\sum u_n$ est absolument convergente.

- • Supposons maintenant qu'il existe $\alpha \leq 1$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell$.

Alors (puisque ℓ est non nulle), la suite $(n^\alpha u_n)$ ne s'annule pas et est de signe constant à partir d'un certain rang, il

en est donc de même pour la suite (u_n) ; de plus (en posant $\frac{1}{\ell} = 0$ si $\ell = \pm \infty$), on a $\frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha u_n} = \frac{1}{\ell}$;

alors $\left(\frac{1}{n^\alpha u_n}\right)$ est une suite bornée, d'après le critère du quotient, ceci implique que $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$. Or la série de

Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge ; ainsi :

La suite (u_n) est à termes de signe constant à partir d'un certain rang, domine la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

D'après le théorème de comparaison pour les séries de terme général de signe constant, $\sum u_n$ diverge.

Application 5

Étudier la nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Application 6

Étudier la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n^{3/2}}$.

3. Théorème spécial des séries alternées (TSSA ou CSSA)

Théorème (théorème spécial des séries alternées ou critère spécial des séries alternées)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

i – La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

ii – $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Alors,

1_ **Convergence des séries alternées**

$\sum (-1)^n u_n$ converge.

2_ **Signe et majoration du reste**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}, \text{ et } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}.$$

Autrement dit, le reste d'ordre n est du signe de son premier terme, et il est majoré en valeur absolue par son premier terme.

3_ **Encadrement de la somme par les sommes partielles**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k.$$

Preuve

Le principe est simple : introduire la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n u_n$, et montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. La suite est, normalement, un jeu d'enfant...

Application 7

1. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

V PRODUITS DE CAUCHY ; FORMULE DE STIRLING

1. Produit de Cauchy de deux séries

i – Définition

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ de terme général donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

ii – Proposition (convergence et somme d'un produit de Cauchy)

Le produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ de deux séries **absolument convergentes** $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge absolument, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k \right) = \left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \right].$$

Preuve (non exigible)

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons S_n (resp. S'_n , resp. S''_n) la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} v_n$, resp. $\sum_{n \geq 0} w_n$),

et R_n (resp. R'_n , resp. R''_n) le reste d'ordre n de la série convergente $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ (resp. $\sum_{n \geq 0} |v_n|$, resp. $\sum_{n \geq 0} |w_n|$).

Posons enfin $A = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_j| + \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n w_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n u_j v_{k-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n u_j v_{k-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} u_j v_i = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n u_j v_i - \sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i,$$

donc $W_n = U_n V_n - \sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i$. Prouver le résultat voulu revient donc à montrer que la suite

$$\left(\sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i \right)_{n \geq 0} \text{ converge vers } 0.$$

Soit un réel ε strictement positif. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} R'_n = 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout

$s \geq n_0$, $|R_s| \leq \varepsilon$ et $|R'_s| \leq \varepsilon$. Maintenant, pour tout $n \geq 2n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i \right| &\leq \sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n |u_j| |v_i| = \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{i=n-j+1}^n |u_j| |v_i| + \sum_{j=n_0+1}^n \sum_{i=n-j+1}^n |u_j| |v_i| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{i=2n_0-j+1}^n |u_j| |v_i| + \sum_{j=n_0+1}^n \left(|u_j| \sum_{i=0}^n |v_i| \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{i=n_0+1}^n |u_j| |v_i| + \sum_{j=n_0+1}^n \left(|u_j| \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{n_0} |u_j| \right) \left(\sum_{i=n_0+1}^{+\infty} |v_i| \right) + \left(\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |u_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_j| \right) R'_n + R_n \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| \right), \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \left| \sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i \right| \leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_j| + \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| \right) \varepsilon = A \varepsilon.$$

$$\text{Résumons – nous : } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq 2n_0, \left| \sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i \right| \leq A \varepsilon :$$

C'est dire que la suite $\left(\sum_{j=0}^n \sum_{i=n-j+1}^n u_j v_i \right)_{n \geq 0}$ converge vers 0, et ceci achève la démonstration.

Application 8 : séries binomiales négatives

On considère un complexe q tel que $|q| < 1$.

1. A l'aide de la règle de d'Alembert, montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la **série binomiale**

$$\text{négative } p\text{-ième : } \sum_{n \geq 0} \binom{n+p}{n} q^n \text{ est absolument convergente.}$$

2. Démontrer la formule de Pascal généralisée : $\forall (r, n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

3. En déduire par récurrence, à l'aide de produits de Cauchy, que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} q^n = \frac{1}{(1-q)^{p+1}}.$$

2. Formule de Stirling

Proposition (formule de Stirling)

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Preuve

Le programme stipule qu'une démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible aux concours, nous l'admettons donc. Toutefois, il faut impérativement savoir traiter l'exercice ci – dessous.

Exercice : Une démonstration de la formule de Stirling

Partie I – Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = (n+1) I_{n+1} I_n$.

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Partie II – Formule de Stirling

On souhaite prouver la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que $v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite α non nulle.

3. A l'aide de la **Partie I**, déterminer α .

4. Conclure.