



2026 – 2027

Feuille d'exercices

Séries numériques

Exercice 1

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$\alpha_- \quad u_n = \frac{\sin\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

$$\beta_- \quad u_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e} \right].$$

$$\chi_- \quad u_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}} (\ln n)^2}.$$

$$\delta_- \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Exercice 2

Nature, et le cas échéant somme, de la série $\sum u_n$, dans chacun des cas suivants :

$$\alpha_- \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$\beta_- \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$\chi_- \quad u_n = \frac{n^3}{n!}.$$

$$\delta_-^* \quad u_n = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

Exercice 4

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \arccos\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 5

Nature de la série de terme général : $\frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

Exercice 6

Soit a un réel strictement positif fixé. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$.

Exercice 7

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par :
$$\begin{cases} u_0 \in [0, \pi] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \end{cases}$$
 converge vers 0.

2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 8

Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ de terme général $\frac{n^\beta}{\alpha(1+\alpha) \dots (1+\alpha^n)}$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs, de limite nulle.

On note D l'ensemble des réels $\alpha > 0$ tel que la série de terme général u_n^α est convergente.

- Montrer que si D est non vide, alors il existe un réel s tel que : $D = [s, +\infty[$, ou bien $D =]s, +\infty[$.
 - Donner un exemple où D est vide, et un exemple où D est égal à $D =]0, +\infty[$.
 - Donner un exemple où $s > 0$ et $D =]s, +\infty[$.
 - Donner un exemple où $s > 0$ et $D = [s, +\infty[$.
-

Exercice 10

- Montrer que pour tout n entier strictement positif : $\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
 - Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0, \pi[$: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\sin \frac{(2m+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$.
 - Soit f une application de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.
 - Montrer que $f : x \mapsto \frac{\frac{1}{2\pi} t^2 - t}{\sin \frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
 - En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
 - En déduire enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
-

Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. On pourra penser aux sommes de Riemann.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = a_n$.
 - Retrouver alors la somme de la série harmonique alternée $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \ln k$.

1. A l'aide d'une intégrale, montrer que v_n est équivalent à $n \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité :
$$\ln \left({}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} \right) - \ln \left({}^n\sqrt{n!} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\ln(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) \right).$$
3. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{{}^n\sqrt{n!}}$.
4. Montrer que $v_n = n \ln(n) - n + o(n)$.
5. Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{{}^n\sqrt{n!}}$.

Exercice 13

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par : $\forall n \geq 1, u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent, mais que la série produit de Cauchy de ces deux séries est divergente.

Exercice 14

A l'aide de produits de Cauchy, calculer :
$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) 3^{-n} \quad 2. \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) 3^{-n}.$$

Exercice 15

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k$.

Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

1. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre A_n , B_n , et b_n .
2. Montrer que les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ sont de même nature. En cas de convergence, comparer leurs sommes.

Exercice 16

On considère un réel a non nul. Déterminer, en fonction de a , la nature de la série de terme général $u_n = a^{\lfloor \ln n \rfloor}$:

1. lorsque a est strictement positif ;
2. lorsque a est strictement négatif.

Exercice 17

1. Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge.
2. Calculer sa somme.

Exercice 18

Sur la série des restes d'une série convergente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$ en fonction de n et de R_n .
2. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.
3. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) R_n$?
4. En déduire que les séries $\sum_{n \geq 0} R_n$ et $\sum_{n \geq 0} n u_n$ sont de même nature, et, qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

Exercice 19

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) : $x e^{n x} = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette équation admet une unique solution réelle x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et déterminer cette limite.
3. Déterminer la nature des séries numériques $\sum x_n$ et $\sum x_n^2$.
4. Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 20

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\{t\}}{t(t+n)} dt$, où $\{t\}$ est la partie fractionnaire de t .

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (on pourra remarquer que $u_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{t+n} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+n)} dt$).
- 3*. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}$ si l'écriture décimale de n ne comporte pas le chiffre 9, et $u_n = 0$ sinon.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge. On pourra commencer par trouver une majoration simple des sommes

$$S_p = \sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} u_n, \text{ pour } p \geq 0.$$

Exercice 22

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

1. On suppose que l'on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n assez grand, et que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.

3. Règle de Raabe – Duhamel

On suppose qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{A}{n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

4. On suppose que pour tout n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 23

Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.
2. On suppose que :
 - La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 - La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
- a_ Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} A_k (b_k - b_{k+1})$ converge absolument.
- b_ En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$.

Exercice 24

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in]-1, 0[$; $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Montrer la stabilité de l'intervalle $] -1, 0[$ par f . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in] -1, 0[$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge, et exprimer sa somme en fonction de u_0 .
4. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $\sum u_n x^n$ converge.
5. Etudier la série $\sum (-1)^n u_n$.
6. On pose $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Montrer que (a_n) converge vers une limite ℓ .
7. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n a_p = \ell$. En déduire un équivalent de u_n .
8. Démontrer le résultat admis en question 7.

Exercice 25

Trouver un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ par deux méthodes différentes.

Exercice 26

Soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a + 1 < b$, $u_0 > 0$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Donner un équivalent de $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ en $+\infty$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = -\infty$, et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- On pose $\alpha = b - a$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série $\sum \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ est convergente.
- Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$. En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.
- Calculer la somme de cette série à l'aide de $\sum_{n=0}^N n(u_{n+1} - u_n) + b u_{N+1} - a u_N$.

Exercice 27

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
- Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{\alpha}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$, et en déduire que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge, puis que (a_n) converge.
- Montrer que $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{1}{2} a_n + \sum_{k=1}^n w_k$, où w_k est le terme général d'une série convergente.
- En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 28

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

Exercice 29

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k)$, et on fixe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

- Montrer, pour tout entier $n \geq 2$: $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k)}{k^\beta} = \frac{S_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) - 1$.
- En déduire la convergence de la série numérique $\sum \frac{\cos(n)}{n^\beta}$.

Exercice 30

- Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$, et par la relation de

réurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$.

Montrer qu'il existe un unique α tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel **non nul**.

- En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.