

Suites numériques

Révisions de première année

Séries numériques

I. Convergence d'une série numérique

- Définitions** : série numérique ; sommes partielles d'une série ; nature, somme d'une série.
- Premières propriétés** : linéarité ; invariance de nature par troncature, convergence des séries complexes.
- Liens entre restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente**

II. Premiers critères de convergence

- Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif**

Version majoration de la suite des sommes partielles, version majoration du terme général ; versions o , O , $\sim$.

- Divergence grossière ; convergence absolue**

Notion de séries semi - convergentes. La suite (u_n) est dite sommable lorsque la série $\sum u_n$ converge absolument.

III. Séries usuelles : séries géométriques, géométriques dérivées première et seconde, exponentielles ; séries de Riemann

IV. D'autres critères de convergence

- Comparaison série / intégrale**

- Premières notions sur les intégrales généralisées**

Nature de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, f étant continue par morceaux et (pour l'instant) positive sur $[a, +\infty[$. Les propriétés nécessaires

à l'établissement des résultats qui suivent ont été données, mais l'étude des intégrales généralisées sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

- Technique de comparaison série/intégrale**

Application aux séries de Riemann. On doit pouvoir traiter le cas des séries de Bertrand.

- Comparaison à des séries usuelles**

- Comparaison à une série géométrique** : règle de d'Alembert.

- Comparaison à une série de Riemann** : règle du " $n^\alpha u_n$ "

- Théorème spécial des séries alternées**

+ Encadrement de la somme, signe du reste et majoration de sa valeur absolue.

V. Produits de Cauchy ; formule de Stirling ; (preuves non exigibles).

Des questions de cours possibles

- Convergence d'une série à terme général complexe :

Soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de terme général complexe.

Alors, $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum_{n \geq n_0} \operatorname{Im}(u_n)$ convergent, et lorsque tel est

$$\text{le cas : } \operatorname{Re} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \operatorname{Im} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

- Théorème de comparaison pour les séries à terme général positif (toute version est exigible).
- La convergence absolue entraîne la convergence.
- Nature des séries géométriques et dérivées secondes ; somme en cas de convergence.
- Convergence et sommes des séries exponentielles : cas réel ou cas complexe.
- Nature des séries de Riemann

Deux preuves ont été données en cours ; on est libre de choisir celle que l'on préfère.

- Nature des séries de Bertrand
- Règle de d'Alembert
- Théorème spécial des séries alternées

Prévisions pour la semaine 2

Même programme.