



2022 - 2023

DS N°1

corrigé

Exercice

1. Nous avons, vu que la suite (a_n) est décroissante,

$$S_7 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \geq a_1 + 2a_2 + 4a_4 = T_2$$

et

$$2S_4 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 \geq a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 \geq a_1 + 2a_2 + 4a_4 = T_2$$

2. Pour la première inégalité, on procède par récurrence. Pour $n = 1$, $S_{2^1-1} = S_1 = a_1$, $T_{1-1} = T_0 = a_1$ et nous avons bien $S_{2^1-1} \leq T_{1-1}$. On suppose que $S_{2^n-1} \leq T_{n-1}$ pour un certain entier n , avec $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= S_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \\ &\leq T_{n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \quad (HR) \\ &\leq T_{n-1} + \underbrace{(2^{n+1} - 2^n)}_{=2^n} a_{2^n} \\ &\leq T_n \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On procède aussi par récurrence pour la seconde inégalité. Pour $n = 0$, $2S_{2^0} = 2a_1$ et $T_0 = a_1$. On suppose alors que $2S_{2^n} \geq T_n$ avec n fixé, $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} 2S_{2^{n+1}} &= 2 \left(S_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \right) \\ &\geq 2T_n + 2(2^{n+1} - 2^n) a_{2^{n+1}} \\ &\geq T_n + 2 \cdot 2^n a_{2^{n+1}} = T_{n+1} \end{aligned}$$

3. Si la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est convergente, alors la suite (S_n) est majorée. Ainsi (S_{2^n}) aussi et (T_n) est alors majorée puisque $T_n \leq 2S_{2^n}$. Comme elle est croissante, elle converge et ainsi la série $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ converge, et on a $T \leq 2S$.

Réciproquement, si la série $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ converge, (T_n) est majorée, (T_{n-1}) aussi, et comme $S_{2^n-1} \leq T_{n-1}$, S_{2^n-1} aussi, et comme elle est croissante, elle converge, et ainsi la suite (S_n) qui est croissante converge aussi vers la même limite et donc la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et on a $S \leq T$.

Ainsi les deux séries sont de même nature et on a dans le cas de convergence, $S \leq T \leq 2S$.

4. Ce critère permet de simplifier grandement l'étude des séries de Riemann, par exemple. On a la suite numérique $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ positive décroissante pour $\alpha \geq 0$ (le cas $\alpha < 0$ n'est pas problématique) et

$$\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum [2^{1-\alpha}]^n$$

On est donc ramené à l'étude d'une série géométrique, de raison $2^{1-\alpha}$, qui est convergente si et seulement si $2^{1-\alpha} < 1$ c'est à dire $\alpha > 1$.

5. Pour la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$, $\alpha > 0$, nous avons $\frac{1}{n \ln^\alpha n}$ décroissant vers 0 (en posant pour $n = 1$, $a_1 = a_2$). Alors cette série est de même nature que la série

$$\sum_{n \geq 1} 2^n \frac{1}{2^n \ln^\alpha 2^n}$$

soit encore

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln 2n^\alpha}$$

qui est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Dans le cas où $\alpha \leq 0$, nous n'avons pas les hypothèses vérifiées, le terme général tend tout de même vers 0, mais la décroissance n'est pas assurée. On écrit que

$$n \times \frac{1}{n \ln^\alpha n} \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ 1 \end{cases}$$

et ainsi à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{n \ln^\alpha n} \geq \frac{1}{n}$$

et on obtient la divergence de la série.

On peut toutefois remarquer que

$$\frac{\ln^{-\alpha} n}{n}$$

décroît à partir d'un certain rang, ce qui permet tout de même d'appliquer le critère de condensation (adapté) : on pose sur $[1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln^{-\alpha} x}{x}$$

On a

$$f'(x) = \frac{-\alpha \frac{\ln^{-\alpha-1} x}{x} \times x - \ln^{-\alpha} x}{x^2} = \frac{-(\alpha + \ln x) \ln^{-\alpha-1} x}{x^2}$$

Problème

PREMIÈRE PARTIE

1. a) On a $u_n \in o(v_n)$, donc $|u_n| \in o(v_n)$. Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ converge, *i.e.* que la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
- b) Soit ε un réel strictement positif. On cherche à démontrer l'existence d'un rang n_0 à partir duquel on a $|R_n| \leq \varepsilon |T_n|$ ($= \varepsilon T_n$ puisque les v_n sont positifs). Choisissons pour cela un entier n_0 à partir duquel on a $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ (un tel entier existe car $u_n \in o(v_n)$). Pour $p \geq n \geq n_0$, on a donc

$$\left| \sum_{k=n}^p u_k \right| \leq \sum_{k=n}^p |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^p v_k.$$

En faisant tendre p vers l'infini (à n fixé), on obtient $|R_n| \leq \varepsilon T_n$ pour $n \geq n_0$, ce qui prouve la relation demandée.

2. On a maintenant $u_n \sim v_n$, soit $u_n - v_n \in o(v_n)$. D'après la première question, la série $\sum u_n - v_n$ converge, et son reste d'ordre n est négligeable devant T_n . Or les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, donc ce reste d'ordre n est

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - v_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = R_n - T_n.$$

On a donc $R_n - T_n \in o(T_n)$, ce qui s'écrit encore $R_n \sim T_n$.

3. a) La série $\sum v_n$ est à termes positifs, donc la suite $(V_n)_n$ est croissante. Comme elle diverge, on a $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. On ne peut en revanche rien dire de la suite $(U_n)_n$: elle peut diverger elle aussi (ex : si $u_n = v_n$) ou bien converger (ex : si $u_n = 0$).
b) Il suffit de choisir n_0 comme à la question 1. b).
c) Remarquons que, puisque $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, on a $V_n > 0$ au moins à partir d'un certain rang. On veut démontrer que $U_n/V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Soit donc ε un réel strictement positif. Choisissons un entier n_0 comme ci-dessus. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$\left| \frac{U_n}{V_n} \right| \leq \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right|}{V_n} + \frac{\left| \sum_{k=n_0}^n u_k \right|}{V_n} \leq \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right|}{V_n} + \frac{\varepsilon \sum_{k=n_0}^n v_k}{V_n} \leq \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right|}{V_n} + \varepsilon$$

car $\sum_{k=n_0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$. L'entier n_0 étant fixé, la quantité $\frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \right|}{V_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Choisissons un entier n_1 à partir duquel cette quantité est inférieure ou égale à ε : pour $n \geq N = \max(n_0, n_1)$, on a

$$\left| \frac{U_n}{V_n} \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que le quotient tend vers 0, soit que $U_n \in o(V_n)$.

4. Comme précédemment, la condition $u_n \sim v_n$ se traduit en $u_n - v_n \in o(v_n)$; on en déduit (question précédente) que $\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) \in o(V_n)$, soit $U_n - V_n \in o(V_n)$, d'où $U_n \sim V_n$.
5. On pose $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n}$: on a $v_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge. On en déduit (question 4) que

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

Or on a

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \ln n,$$

d'où l'équivalent demandé.

6. a) On a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{n+1},$$

donc x_{n+1} est négligeable devant x_n , d'où l'on tire

$$x_n - x_{n+1} \sim x_n = \frac{1}{n!}.$$

- b) Comme la série $\sum x_n$ est à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum (x_n - x_{n+1})$ est elle aussi convergente, ainsi que l'équivalence des restes (question 4) :

$$\sum_{k=n}^{\infty} x_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} (x_k - x_{k+1}).$$

On a par ailleurs (on peut séparer la somme en deux car les deux séries écrites convergent)

$$\sum_{k=n}^{\infty} (x_k - x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} x_k - \sum_{k=n}^{\infty} x_{k+1} = \sum_{k=n}^{\infty} x_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = x_n,$$

d'où l'équivalent cherché :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{n!}.$$

7. a) Pour tout entier $k \geq 2$, on a $0 < \ln k \leq \ln(k+1) \leq k$, donc $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\ln k}$. La série (à termes positifs) $\sum \frac{1}{k}$ étant divergente, la série $\sum \frac{1}{\ln k}$ l'est aussi.
b) – Première méthode : récurrence (qui se traite sans difficulté).
– Deuxième méthode : on écrit $1 = (k+1) - k$. Pour tout $n \geq 2$, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} &= \sum_{k=2}^n \frac{(k+1) - k}{\ln k} = \sum_{k=2}^n \frac{k+1}{\ln k} - \sum_{k=2}^n \frac{k}{\ln k} = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{k}{\ln(k-1)} - \sum_{k=2}^n \frac{k}{\ln k} \\ &= \frac{n+1}{\ln n} + \sum_{k=3}^n k \left[\frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k} \right] - \frac{2}{\ln 2}. \end{aligned}$$

- c) Posons maintenant $u_n = n \left[\frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n} \right]$ et $v_n = \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geq 2$. Comme $v_n > 0$ pour tout $n \geq 2$ et que la série $\sum v_n$ diverge, il suffit, pour obtenir le résultat demandé, de démontrer que $u_n \in o(v_n)$. Comme $\ln(n-1) \sim \ln n$ (même preuve que pour $\ln(n+1) \sim \ln n$), on a

$$u_n = n \frac{\ln n - \ln(n-1)}{\ln(n) \ln(n-1)} = n \frac{\ln n - \ln n - \ln(1 - \frac{1}{n})}{\ln(n) \ln(n-1)} = n \frac{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{\ln(n) \ln(n-1)} \sim \frac{1}{(\ln n)^2} \in o\left(\frac{1}{\ln n}\right) = o(v_n),$$

ce qui prouve la relation demandée.

Comme le terme constant $\frac{2}{\ln 2}$ est lui aussi négligeable devant $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}$ (qui tend vers l'infini), la formule démontrée à la question précédente s'écrit

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} = \frac{n+1}{\ln n} + o\left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}\right),$$

soit encore

$$\frac{n+1}{\ln n} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} + o\left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{n+1}{\ln n} \sim \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}.$$

On simplifie cet équivalent en

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}.$$

DEUXIÈME PARTIE

1. En prenant le logarithme, on obtient

$$\ln(u_{n+1}) - \ln u_n = \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Premier cas : $\alpha \neq 0$. On a alors

$$\ln(u_{n+1}) - \ln u_n \sim \frac{-\alpha}{n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est à termes positifs et divergente, on en déduit (question 4 de la première partie)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln u_k \sim - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha \frac{1}{k},$$

soit que

$$\ln u_n - \ln u_1 \sim -\alpha H_{n-1} \sim -\alpha \ln(n-1) \sim -\alpha \ln n.$$

On a donc

$$\ln u_n = -\alpha \ln n + \ln u_1 + o(\ln n) = -\alpha \ln n + o(\ln n) \sim -\alpha \ln n,$$

donc

$$\frac{\ln u_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\alpha.$$

– Deuxième cas : $\alpha = 0$. La relation s'écrit maintenant

$$\ln(u_{n+1}) - \ln u_n \in o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On déduit de la question 3 de la première partie que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln u_k \in o\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) = o(\ln n),$$

d'où l'on tire

$$\ln u_n - \ln u_1 \in o(\ln n),$$

soit

$$\ln u_n = \ln u_1 + o(\ln n) \in o(\ln n) :$$

le quotient tend cette fois-ci vers 0.

2. a) On a

$$\frac{\ln(n^\beta u_n)}{\ln n} = \beta + \frac{\ln u_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta - \alpha$$

d'après la question précédente.

b) Comme $\beta - \alpha < 0$, on a

$$\ln(n^\beta u_n) \sim (\beta - \alpha) \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty,$$

d'où l'on tire que $n^\beta u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ce qui s'écrit encore

$$u_n \in o\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Comme $\beta > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge également.

Noter que, dans la question suivante, on demande un équivalent du reste de cette série. La réponse à cette question ne pouvait donc être que «la série est convergente».

c) Posons, comme le suggère l'énoncé, $v_n = \frac{nu_n}{\alpha-1}$. On a

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)u_{n+1} - nu_n] = \frac{nu_n}{1-\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] \\ &= \frac{nu_n}{1-\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \right] = \frac{nu_n}{1-\alpha} \left[\frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= u_n + o(u_n) \sim u_n. \end{aligned}$$

La série de terme général u_n étant convergente et à termes positifs, on déduit de la première partie l'équivalent

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} (v_k - v_{k+1}).$$

Pour calculer la somme de cette série, on ne peut pas séparer la somme en deux cette fois-ci car on ne sait pas si la série $\sum v_n$ converge. On passe par les sommes partielles : pour tout entier $p \geq n+1$, on a

$$\sum_{k=n+1}^p (v_k - v_{k+1}) = v_{n+1} - v_{p+1}.$$

Or on sait que $u_p \in o\left(\frac{1}{p^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$, donc $pu_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, donc $v_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, ce qui prouve que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (v_k - v_{k+1}) = v_{n+1}.$$

Reste pour conclure à démontrer que $(n+1)u_{n+1}$ est équivalent à nu_n . Comme $n+1 \sim n$, il suffit pour cela de démontrer que $u_{n+1} \sim u_n$: c'est vrai car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

d) Posons $u_n = n^{-\gamma}$: on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma} = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

avec $\gamma > 1$. Il résulte de la question précédente que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma} \sim \frac{n \cdot n^{-\gamma}}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{n^{\gamma-1}}.$$

e) Soit $k \geq 2$: on a

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Soit $n \geq 2$. Pour tout entier $p > n$, on a

$$\sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right),$$

soit

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$

Passons à la limite lorsque $p \rightarrow \infty$: on obtient

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Les deux termes extrêmes étant équivalents à $\frac{1}{n}$, on en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n},$$

ce qui est bien l'équivalent obtenu à la question précédente pour $\gamma = 2$.

3. a) Choisissons maintenant un réel $\beta \in]\alpha, 1[$ et posons à nouveau $x_n = n^\beta u_n$. On obtient, comme dans la question précédente, que

$$\ln(n^\beta u_n) \sim (\beta - \alpha) \ln n.$$

On a maintenant $\beta - \alpha > 0$, d'où l'on déduit que $\ln(n^\beta u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc que $n^\beta u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, ce qui signifie que $\frac{1}{n^\beta} \in o(u_n)$. Comme $\beta < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ est divergente. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ l'est aussi.

b) Posons $v_n = \frac{nu_n}{1-\alpha}$: le même calcul qu'à la question précédente montre que l'on a

$$v_{n+1} - v_n \sim u_n.$$

Comme la série $\sum u_n$ est à termes positifs et divergente, la première partie donne

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0 = v_{n+1} = \frac{(n+1)u_{n+1}}{1-\alpha}.$$

Reste pour conclure à démontrer que $(n+1)u_{n+1} \sim nu_n$: c'est vrai pour la même raison qu'à la question précédente.

c) En posant $u_n = k^{-\gamma}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma} = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

avec $\gamma < 1$. Il résulte de la question précédente que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\gamma} \sim \frac{n^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

d) En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Par somme (télescopique), on en déduit que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}.$$

Les deux membres extrêmes sont équivalents à $2\sqrt{n}$, donc le terme encadré également, ce qui s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n} :$$

c'est bien l'équivalent obtenu à la question précédente.

4. a) On écrit maintenant des développements limités forts (partout) : on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) Prenons le logarithme : il vient

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant à termes positifs et convergente, on en déduit que la série $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est absolument convergente, donc convergente (il est impératif de passer par l'absolue convergence ici : les termes n'ont aucune raison d'être positifs eux aussi).

c) On déduit de cette convergence que la suite $(\ln v_n)_n$ est elle aussi convergente. Notons L sa limite : on a alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^L$, ce qui s'écrit aussi $u_n \sim \frac{e^L}{n^\alpha}$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. On retrouve ce que l'on avait déjà obtenu : pour $\alpha > 1$, la série converge, alors qu'elle diverge pour $\alpha < 1$. Cependant, l'étude précédente n'avait pas permis de traiter le cas $\alpha = 1$.