



2026 – 2027

DS 1

Séries numériques

On laissera impérativement en tête de devoir une place suffisante pour les commentaires (au moins 10 lignes). On laissera non moins impérativement libre une marge de taille raisonnable.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Seuls les résultats **encadrés** ou **soulignés** seront pris en considération.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants, et il comporte 5 pages.

PROBLÈME 1

Partie A

Preliminaires

Dans cette partie, on établit différents résultats, qui seront éventuellement utiles pour la suite du problème. Les questions de cette partie **A.** sont mutuellement indépendantes.

1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1.a. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} ;$

1.b. $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$

Ces deux séries n'interviendront pas dans la suite du problème : ce sont juste deux études comme ça en passant.

1.c. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ on déterminera la somme de cette série.

2. Justifier, pour tout $x \in]-1, 1[$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) = \frac{-x^2 + x \cos(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}.$$

3. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N(\theta) = \sum_{n=1}^N (-1)^n \sin(n\theta)$.

On pose également $S_0(\theta) = 0$.

Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$S_N(\theta) = \sum_{n=1}^N \sin(n(\theta + \pi)) = \frac{\sin\left(\frac{(N+1)(\theta + \pi)}{2}\right) \sin\left(\frac{N(\theta + \pi)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En déduire que : $\forall \theta \in]-\pi, \pi[, |S_N(\theta)| \leq \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$

4. Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$. En utilisant une formule de Taylor, prouver que

$$\left| \sin(n(\theta + h)) - \sin(n\theta) - nh \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 n^2}{2}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction $U_x(\theta) : \begin{cases}]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) \end{cases}$.

5.a. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[, U_x'(\theta) = \frac{-x^2 - x \cos(\theta)}{x^2 + 2x \cos(\theta) + 1}.$

5.b. On suppose ici que $x = 1$. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[, U_1(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$

Partie B

Étude d'une fonction définie comme somme d'une série

Le but de cette partie est d'étudier, pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, la fonction f_x donnée par

$$\forall \theta \in]0, \pi[, f_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n}.$$

1. Où l'on prouve que, pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction f_x est bien définie.

1.a. En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n \sin(n\theta) = (S_n(\theta) - S_{n-1}(\theta))$, vérifier

que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) + \frac{x^N S_N(\theta)}{N}.$$

1.b. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

1.c. En utilisant **A.3.**, déduire de ce qui précède que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n}$ converge.

1.d. Justifier de plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{2}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

2. Dans cette question, on suppose que $x \in [0, 1[$.

2.a. Donner la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

2.b. En utilisant le résultat de la question **A.4.**, montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, pour tout h non

$$\text{nul tel que } \theta + h \in]0, \pi[, \left| f_x(\theta + h) - f_x(\theta) - h \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2}{2} \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2.c. En déduire que f_x est dérivable sur $]0, \pi[$, et que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$f'_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta).$$

2.d. Montrer alors, en utilisant **A.2.**, que : $\forall \theta \in]0, \pi[, f'_x(\theta) = \frac{-x^2 - x \cos(\theta)}{x^2 + 2x \cos(\theta) + 1}$.

2.e. En déduire qu'il existe une constante K_x telle que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$f_x(\theta) = \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) + K_x.$$

3. Le but de cette question est de déterminer la valeur de la constante K_x .

3.a. Soit ε un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que pour tout $\theta \in]0, \alpha[$:

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

3.b. Déduire de ce qui précède, et du résultat de la question **1.d.**, que $\lim_{\theta \rightarrow 0} f_x(\theta) = 0$.

3.c. Déterminer alors la valeur de K_x .

4.a. Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé, et soit ε un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in]1 - \alpha, 1[$:

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

4.b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} f_x(\theta) = f_1(\theta)$.

4.c. En utilisant les résultats des questions précédentes et un peu de trigo, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} = -\frac{\theta}{2}.$$

4.d. En choisissant une valeur judicieuse de θ , prouver enfin l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Problème 2 : étude d'un procédé de sommation

Notations : pour tout entier naturel n , on note $n!$ la factorielle de n (avec la convention $0! = 1$), $\llbracket 0, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le nombre de parties ayant k éléments d'un ensemble à n éléments, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et l'on pose $\sigma_0 = 0$.

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.

À toute suite complexe a , on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

L'objet du problème est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Partie I : deux exemples

1) **Cas d'une suite constante** : soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on définit la suite a par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \alpha$.

Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2) **Cas d'une suite géométrique** : soit $z \in \mathbb{C}$; on définit la suite a par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = z^n$.

a) Exprimer a_n^* en fonction de z et de n .

b) On suppose que $|z| < 1$.

(i) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

c) On suppose que $|z| \geq 1$.

(i) Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?

(ii) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

(iii) On suppose que $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation

Dans cette partie, pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie de la même façon.

1) Comparaison des convergences des deux suites

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un entier k fixé, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(i) Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soient a une suite réelle et q un entier naturel fixé.

On considère, pour $n > q$, la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$.

Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

d) On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

e) La convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$?

2) Comparaison des convergences des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^*$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

a) Pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k , c'est-à-dire sous la forme

$$U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k.$$

b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

(i) À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et de k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

(ii) Établir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur n (on pourra remarquer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = S_k - S_{k-1}$, avec la convention $S_{-1} = 0$).

c) On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente et

exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

d) La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$?