



2026- 2027

PC

Espaces probabilisés

I Espaces probabilisables

Définition

Soit Ω un ensemble, appelé **univers**.

On appelle **tribu** ou **σ -algèbre** de parties de Ω tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

i_ $\Omega \in \mathcal{T}$.

ii_ $\forall A \in \mathcal{T}, \overline{A} \in \mathcal{T}$ (autrement dit, $\mathcal{T}$ est stable par complémentation)

iii_ Pour tout ensemble I fini ou dénombrable, $\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

(autrement dit, $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie ou dénombrable).

Vocabulaire

Lorsque $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de Ω :

- Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **événements**.
- $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **univers probabilisable**.

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Alors,

i_ $\emptyset \in \mathcal{T}$.

ii_ $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \Delta B$ appartiennent à $\mathcal{T}$.

iii_ Pour tout ensemble I fini ou dénombrable : $\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I,$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \text{ et } \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}.$$

II Espaces probabilisés

1_ Définition d'une probabilité sur un ensemble fini

(Rappel de première année)

Définitions

Soit Ω un ensemble fini, appelé **univers**. Alors :

i_ $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle **espace ou univers probabilisable**.

ii_ $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle un **événement**.

iii_ $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle un **événement élémentaire**.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un univers probabilisable fini.

On appelle **probabilité** définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application

$$\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ X \mapsto \mathbb{P}(X) \end{cases} \text{ vérifiant :}$$

$$i_ \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

$$ii_ \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Cette propriété s'appelle l'**additivité (forte)** de la probabilité $\mathbb{P}$.

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ s'appelle alors **espace ou univers probabilisé fini**.

2_ Probabilité sur un univers quelconque

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application

$$\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{T} \rightarrow [0, 1] \\ X \mapsto \mathbb{P}(X) \end{cases} \text{ vérifiant :}$$

$$i_ \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

$$ii_ \quad \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \text{ deux à deux incompatibles ,}$$

$$\bullet \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) \text{ converge, et :}$$

$$\bullet\bullet \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Cette seconde propriété s'appelle la **σ -additivité** de la probabilité $\mathbb{P}$.

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ s'appelle alors **espace ou univers probabilisé**.

Définitions vocabulaires

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

• Soit $A \in \mathcal{T}$. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, A est dit **négligeable** ou *quasi-impossible*.

•• Soit $A \in \mathcal{T}$. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, A est dit **quasi-certain** ou *presque sûr*.

••• Soit $\mathcal{P}$ une proposition logique, et $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}\}$.

Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que $\mathcal{P}$ est **vraie presque sûrement (p.s.)**, ou **presque partout (p.p.)**.

3_ Propriétés d'une probabilité

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

Soit $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ deux événements, et $(A_i)_{i \in [1, n]}$ une famille d'événements.

0_ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

1_ Si A et B sont **incompatibles** (disjoints), $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2_ Si les $(A_i)_{i \in [1, n]}$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

3_ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

4_ $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

En particulier, si $B \subset A$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

5_ La probabilité $\mathbb{P}$ est **isotone** (croissante pour l'inclusion), i.e. $B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

6_ **Analogie de la formule des quatre cardinaux**

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

7_ **Formule du crible de Poincaré**

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^k A_{i_\ell}\right) \right)$$

4_ **Caractérisation d'une probabilité sur un univers fini ou dénombrable**

a_ Sur un univers fini

Théorème

Soit Ω un univers fini, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, et $(p_1, \dots, p_n)$ n réels.

Alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [1, n]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$

si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall i \in [1, n], 0 \leq p_i (\leq 1) \\ \bullet\bullet \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{array} \right.$.

La probabilité $\mathbb{P}$ est alors unique, et pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in [1, n] / \omega_i \in A} p_i$.

b_ Sur un univers dénombrable

Théorème

Soit Ω un univers **dénombrable**, $\Omega = \{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq p_k (\leq 1) \\ \bullet\bullet \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{array} \right.$. Alors :

• il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$.

•• $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in \mathbb{N} / \omega_k \in A} p_k$.

Autrement dit, en Français : « La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent » ...

5_ Equiprobabilité (probabilité uniforme) sur un univers fini

Théorème

Soit Ω un univers fini, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Alors il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall i \in [1, n], \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Cette mesure de probabilités est appelé probabilité uniforme sur Ω .

On a pour cette mesure de probabilité :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

6_ Systèmes complets et quasi – complets d'événements

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un univers probabilisable, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, où I est un ensemble **au plus dénombrable**.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est appelée **système complet d'événements** de $(\Omega, \mathcal{T})$ ssi c'est un **recouvrement disjoint** de Ω , i.e. ssi :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ (recouvrement)
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (disjoint)

Propriété 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

- Soit $(A_i)_{i \in 1, n}$ un système complet fini d'événements. Alors,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$$

- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet dénombrable d'événements de $\mathcal{T}$. Alors,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) \text{ converge, et } \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Propriété 2 (sous-additivité, ou inégalité de Boole)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ converge :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

On appelle **système quasi – complet d'événements** de $\mathcal{T}$ toute famille finie $(A_i)_{i \in [1, n]}$, ou toute famille

dénombrable $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, formée d'événements deux à deux quasi – incompatibles, et vérifiant $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$

(dans le cas d'une famille finie), ou $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$ (dans le cas d'une famille infinie).

III Théorèmes de continuité pour les probabilités

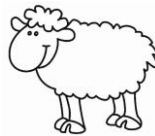
Théorème (de continuité croissante, ou de limite monotone dans le cas croissant)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements de $\mathcal{T}$, i.e. telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_N).$$

Preuve

L'idée est d'appliquer la σ – additivité. L'intérêt de la démarche est de voir comment se ramener à une famille d'événements deux à deux incompatibles. Un dessin ? Ok, un dessin...



On pose donc : $B_0 = A_0$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. On vérifie alors que :

- Les événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles :

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$. On veut montrer que $B_i \cap B_j = \emptyset$. Supposons un instant qu'il n'en est rien. Il existe alors un élément $\omega \in B_i \cap B_j$. On peut supposer, par exemple, que $i < j$. Comme $\omega \in B_i$, on a $\omega \in A_i$.

Or $i < j$, i.e. $i \leq j-1$. La croissance de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne alors : $\omega \in A_{j-1}$. **(1)**

Mais $\omega \in B_j = A_j \setminus A_{j-1}$. En particulier : $\omega \notin A_{j-1}$. **(2)**

Regardez bien **(1)** et **(2)**, vous constaterez que ça fait désordre...

Par suite tout ceci est un peu légèrement contradictoire, et $B_i \cap B_j = \emptyset$.

- $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. En effet :

- $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset A_n$, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

- Soit $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Il existe par définition un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$. Ainsi, l'ensemble

$\mathcal{E} = \{ n \in \mathbb{N} / \omega \in A_n \}$ est non vide. Il admet donc un plus petit élément n_0 , auquel cas $\omega \in A_{n_0}$, mais $\omega \notin A_{n_0-1}$ (avec la convention $A_{-1} = \emptyset$).

- Si $n_0 = 0$, on a $\omega \in A_{n_0} = B_{n_0}$, donc $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.
- Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on a $\omega \in A_{n_0}$ et $\omega \notin A_{n_0-1}$, donc $\omega \in A_{n_0} \setminus A_{n_0-1}$,

i.e. encore $\omega \in B_{n_0}$. Par suite, $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

On a donc dans tous les cas $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$, d'où $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Finalement : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

L'avantage des $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par rapport aux $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est qu'ils sont deux à deux incompatibles, et que l'on peut

ainsi leur appliquer la propriété de σ -additivité. On peut alors écrire : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$, puis par

σ -additivité, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ étant **assurée**

automatiquement par la σ -additivité. So :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})), \quad (\text{car } A_{n-1} \subset A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_0) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) \\ &= \mathbb{P}(A_0) + \lim_{N \rightarrow +\infty} (\mathbb{P}(A_N) - \mathbb{P}(A_0)) = \boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_N)}. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème (de continuité décroissante, ou de limite monotone dans le cas décroissant)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements de $\mathcal{T}$, i.e. telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_N).$$

Preuve

On écrit tout d'abord que : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$ (1).

Or, puisque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion d'événements de $\mathcal{T}$, la suite $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est quant à elle croissante pour l'inclusion. On peut donc lui appliquer le théorème de limite monotone pour une probabilité, cas croissant. Il en résulte que :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\overline{A_N} \right) = 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(A_N \right),$$

d'où en réinjectant dans (1) : $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(A_N \right).$

Théorème (cas d'une suite quelconque)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^N A_n \right).$
- $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^N A_n \right).$

Preuve

La preuve est intéressante car elle montre comment se ramener aisément du cas quelconque au cas croissant (pour une autre suite, of course...). Je traite le cas de la réunion, je vous laisse l'intersection.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k.$

- Déjà, il est clair que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, puisque : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$B_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k \supset \bigcup_{k=0}^n A_k = B_n.$$

- Maintenant, je dis que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$ En effet :

$$\circ \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset B_n, \text{ donc } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

$$\circ \quad \forall n \in \mathbb{N}, B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k, \text{ donc } \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

Puisque la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, on peut lui appliquer le théorème de limite monotone pour une

probabilité, cas croissant. Il vient alors $\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(B_N \right),$ autrement dit :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^N A_n \right).$$

Le cas d'une intersection se montre en passant au complémentaire, ou encore en posant $B_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$ et

en appliquant à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le théorème de limite monotone pour une probabilité, cas décroissant. $\square$

IV Probabilités conditionnelles ; indépendance

1 Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé.

Soit A un événement **non négligeable** de $\mathcal{T}$, i.e. tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle sachant A** l'application $\mathbb{P}_A$ définie sur $\mathcal{T}$ par :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On note aussi $\mathbb{P}(B | A)$ la quantité $\mathbb{P}_A(B)$.

En pratique, on connaît souvent $\mathbb{P}_A(B)$, la formule précédente s'écrit donc aussi :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A).$$

Théorème fondamental

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit A un événement **non négligeable** de $\mathcal{T}$, i.e. tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

La probabilité $\mathbb{P}_A$ conditionnelle sachant A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

En particulier,

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, $(B, C) \in \mathcal{T}^2$ deux événements.

Soit A un événement **non négligeable** de $\mathcal{T}$, i.e. tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors,

- $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
- $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$.

2 Indépendance de deux événements

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ deux événements.

A et B sont dits **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$.

On note alors parfois $A \perp B$.

Si l'événement A est **non négligeable**, i.e. tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, cela revient donc à dire :

$$A \perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

En langage naïf, cela signifie donc que l'événement A n'a aucune influence sur B , et réciproquement lorsque B est aussi non négligeable, par symétrie évidente de la relation initiale.

Mise en garde n° 1

La notion d'**indépendance** de deux événements **n'est pas une notion intrinsèque** à ces deux événements. Elle **dépend de la probabilité** $\mathbb{P}$ qui équipe l'univers probabilisable.

Se méfier donc, parfois, de l'intuition ...

NE SURTOUT PAS CONFONDRE INDEPENDANCE ET INCOMPATIBILITE.

En particulier :

Deux événements indépendants et non négligeables ne sont pas incompatibles.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ deux événements.

On suppose que A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$. Alors,

- A et $\overline{B}$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.

3_ Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

Définition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{T}^n$ n événements.

$(A_1, \dots, A_n)$ sont dits **deux à deux indépendants** si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants.}$$

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ n événements.

$(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants ssi pour toute partie $I \subset [1, n]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque

Il revient clairement au même de dire que :

$$\forall k \in [1, n], \forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset [1, n], \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^k A_{i_\ell}\right) = \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(A_{i_\ell}).$$

Proposition 1

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

La réciproque est fausse.

Définition 3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits **mutuellement indépendants** ssi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$(A_0, \dots, A_n)$ sont indépendants au sens vu ci-dessus.

Définition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$ une famille d'événements.

Les $(A_i)_{i \in I}$ sont dits **mutuellement indépendants** ssi $\forall J \subset I, J$ finie,

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) .$$

Proposition 2

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Alors, la famille $(B_i)_{i \in I}$, où $\forall i \in I, B_i$ désigne A_i ou $\overline{A_i}$, est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.

V Les trois formules reines du calcul des probabilités

On convient dans ce paragraphe V. de poser lorsque A est un événement négligeable :

$$\text{Pour tout évènement } B, \quad \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) = 0 .$$

1_ La formule des probabilités composées

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ n événements.

On suppose que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

2_ La formule des probabilités totales

Théorème (cas d'une famille finie)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in [1, n]}$ un système complet ou quasi-complet d'événements.

$$\text{Alors pour tout évènement } B, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i) .$$

Théorème (cas d'une famille infinie dénombrable indexée par $\mathbb{N}$)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet ou quasi-complet d'événements.

Alors pour tout évènement B :

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)$ converge, et

$$\bullet \bullet \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n) .$$

Cas particulier fréquent

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit A un événement non négligeable et non quasi – certain.

(i.e. $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \neq 1$). Alors, $\forall B \in \mathcal{T}$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \mathbb{P}(\bar{A}) .$$

3_ La formule de Bayes, ou formule de probabilité des causes

Théorème (cas d’une famille infinie dénombrable indexée par $\mathbb{N}$)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet ou quasi – complet

d’événements de $\mathcal{T}$. Soit B un événement. Alors, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_B(A_{n_0}) = \frac{\mathbb{P}_{A_{n_0}}(B) \mathbb{P}(A_{n_0})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)} .$$