



2026 - 2027

DS 1

corrigé

PROBLÈME 1

Partie A

Preliminaires

1.a. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ est à terme général positif ; pour tout $n \geq 9$,

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \leq \frac{1}{(2 \ln 3)^{\ln n}} \leq \frac{1}{(2 \ln e)^{\ln n}} = \frac{1}{2^{\ln n}} = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$), donc, d'après le théorème de

convergence par majoration pour les séries de terme général positif,

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \text{ converge.}$$

1.b. $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$ est elle aussi à terme général positif.

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2} \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \right) - 1 \\ &= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + u_n, \end{aligned}$$

avec $u_n = o \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$, et :

- $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ est positif, et tend vers 0 en décroissant ; d'après le théorème spécial des séries

alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge.

• • La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

• • • On a $u_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolument, donc $\sum u_n$

converge.

Alors, $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$ diverge, comme combinaison linéaire de deux séries convergentes et d'une série divergente.

1.c. Pour tout entier N supérieur ou égal à 1,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \text{ changement d'indice dans la deuxième somme} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Par définition de la convergence et de la somme

d'une série, cela revient à dire que $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge, et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$.

2. Pour tout $x \in]-1, 1[$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule d'Euler : $x^n \cos(n\theta) = x^n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$, ce que l'on peut

réécrire sous la forme : $x^n \cos(n\theta) = \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2}$.

Comme $|x e^{i\theta}| = |x e^{-i\theta}| = |x| < 1$, les séries géométriques $\sum_{n \geq 1} (x e^{i\theta})^n$ et $\sum_{n \geq 1} (x e^{-i\theta})^n$ sont

convergentes ; de plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{i\theta})^n = \frac{x e^{i\theta}}{1 - x e^{i\theta}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{-i\theta})^n = \frac{x e^{-i\theta}}{1 - x e^{-i\theta}}$.

Par linéarité, il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} x^n \cos(n\theta) = \sum_{n \geq 1} \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2}$ converge, et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x e^{i\theta}}{1 - x e^{i\theta}} + \frac{x e^{-i\theta}}{1 - x e^{-i\theta}} \right). \text{ En mettant au même dénominateur,}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2} = \frac{x e^{i\theta} (1 - x e^{-i\theta}) + x e^{-i\theta} (1 - x e^{i\theta})}{2 (1 - x e^{i\theta}) (1 - x e^{-i\theta})}, \text{ soit}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2} = \frac{x (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - 2x^2}{2 (x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + 1)}, \text{ ou encore :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2} = \frac{x (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - 2x^2}{2 (x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + 1)}.$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x e^{i\theta})^n + (x e^{-i\theta})^n}{2} = \frac{2x \cos(\theta) - 2x^2}{2(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1)} = \frac{-x^2 + x \cos(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}}.$$

3. Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_N(\theta) &= \sum_{n=1}^N (-1)^n \sin(n\theta) = \sum_{n=1}^N \sin(n(\theta + \pi)) \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^N e^{in(\theta + \pi)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{i(\theta + \pi)} \frac{1 - e^{iN(\theta + \pi)}}{1 - e^{i(\theta + \pi)}} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{i(\theta + \pi)} \frac{e^{i\frac{N}{2}(\theta + \pi)} \sin\left(\frac{N(\theta + \pi)}{2}\right)}{e^{i\frac{1}{2}(\theta + \pi)} \sin\left(\frac{\theta + \pi}{2}\right)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{N+1}{2}(\theta + \pi)} \frac{\sin\left(\frac{N(\theta + \pi)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta + \pi}{2}\right)} \right), \end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{S_N(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(N+1)(\theta + \pi)}{2}\right) \sin\left(\frac{N(\theta + \pi)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Comme $\left| \sin \left(\frac{(N+1)(\theta + \pi)}{2} \right) \right| \leq 1$, $\left| \sin \left(\frac{N(\theta + \pi)}{2} \right) \right| \leq 1$ et $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) > 0$

(car $\frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$), on en déduit que $\boxed{|S_N(\theta)| \leq \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}}.$

4. La fonction sinus est de classe C^2 sur $\overline{[n\theta, n\theta + nh]}$, la formule de Taylor – Laplace peut donc être appliquée à l'ordre 1 :

$$\sin(n(\theta + h)) = \sin(n\theta) + nh \sin'(n\theta) + \int_{n\theta}^{n(\theta+h)} (n(\theta + h) - t) \sin''(t) dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left| \sin(n(\theta + h)) - \sin(n\theta) - nh \cos(n\theta) \right| &= \left| - \int_{n\theta}^{n(\theta+h)} (n(\theta + h) - t) \sin(t) dt \right| \\ &\leq \int_{n\theta}^{n(\theta+h)} (n(\theta + h) - t) |\sin(t)| dt \\ &\leq \int_{n\theta}^{n(\theta+h)} (n(\theta + h) - t) dt = \left[\frac{(n(\theta + h) - t)^2}{2} \right]_{n\theta}^{n(\theta+h)} = \frac{h^2 n^2}{2}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité $\boxed{\left| \sin(n(\theta + h)) - \sin(n\theta) - nh \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 n^2}{2}}.$

5.a. La fonction U_x est dérivable sur $]0, \pi[$, et pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} U_x'(\theta) &= \frac{\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)} \right)'}{1 + \left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)} \right)^2} \\ &= \frac{-x^2 \sin^2(\theta) - (x \cos(\theta) + 1)x \cos(\theta)}{x^2 \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{x^2 \sin^2(\theta) + (x \cos(\theta) + 1)^2}{x^2 \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_x'(\theta) &= \frac{\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)} \right)}{1 + \left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)} \right)^2} \\
&= \frac{-x^2 \sin^2(\theta) - (x \cos(\theta) + 1)x \cos(\theta)}{x^2 \sin^2(\theta)} \\
&= \frac{x^2 \sin^2(\theta) + (x \cos(\theta) + 1)^2}{x^2 \sin^2(\theta)} \\
&= \frac{-x^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - x \cos(\theta)}{x^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + 2x \cos(\theta) + 1},
\end{aligned}$$

donc :
$$U_x'(\theta) = \frac{-x^2 - x \cos(\theta)}{x^2 + 2x \cos(\theta) + 1}.$$

5.b. Ici, on a pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $U_1'(\theta) = \frac{-1 - \cos(\theta)}{2 \cos(\theta) + 2} = -\frac{1}{2}$, il existe donc une

constante A telle que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $U_1(\theta) = A - \frac{\theta}{2}$.

On a $U_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, d'où l'on déduit que $A = \frac{\pi}{2}$, et que

$$\forall \theta \in]0, \pi[, U_1(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Partie B

Étude d'une fonction définie comme somme d'une série

1.a. Pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} &= \sum_{n=1}^N \frac{x^n (S_n(\theta) - S_{n-1}(\theta))}{n} \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{x^n S_n(\theta)}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{x^n S_{n-1}(\theta)}{n} \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{x^n S_n(\theta)}{n} - \sum_{n=2}^N \frac{x^n S_{n-1}(\theta)}{n} \quad \text{suppression d'un terme d'indice 1, nul} \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{x^n S_n(\theta)}{n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x^{n+1} S_n(\theta)}{n+1} \quad \text{changement d'indice dans la deuxième somme} \\
&= \frac{x^N S_N(\theta)}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x^n S_n(\theta)}{n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x^{n+1} S_n(\theta)}{n+1},
\end{aligned}$$

et en regroupant les deux sommes, il vient comme désiré :

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) + \frac{x^N S_N(\theta)}{N}}.$$

1.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $u : x \mapsto x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right)$ est dérivable sur $[0, 1]$, et pour tout

$x \in [0, 1]$, $u'(x) = x^{n-1} - x^n = x^{n-1}(1-x) \geq 0$. u est donc croissante sur $[0, 1]$, et il en résulte que pour tout $x \in [0, 1]$, $u(0) \leq u(x) \leq u(1)$, soit

$$\boxed{0 \leq x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}.$$

1.c. • Prouvons déjà la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après **A.3.** et **b.**,

$$\left| x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \right| = |S_n(\theta)| x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \leq \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

On a prouvé en **A.1.c.** la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \left| x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \right|$ est une série à terme général positif ; le terme général de cette

série est majoré par celui de la série convergente $\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$. D'après le

théorème de convergence par majoration pour les séries de terme général positif,

$\sum_{n \geq 1} \left| x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \right|$ converge. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n}$ est donc absolument

convergente, et de ce fait elle converge. Notons ℓ sa somme. On a, par définition de la convergence d'une

série, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) = \ell$.

• • La majoration $|S_N(\theta)| \leq \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ prouve également que $\left| \frac{x^N S_N(\theta)}{N} \right| \leq \frac{1}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)},$

puis que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^N S_N(\theta)}{N} = 0$. En passant à la limite dans l'égalité

$$\sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) + \frac{x^N S_N(\theta)}{N},$$

on obtient donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \ell$:

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n}$ converge

, et en outre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right).$$

1.d. L'égalité $\sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) + \frac{x^N S_N(\theta)}{N}$, et la

convergence des séries mises en jeu, autorisent à écrire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=N}^{+\infty} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) + \frac{x^N S_N(\theta)}{N}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^{+\infty} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \right| + \left| \frac{x^N S_N(\theta)}{N} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N}^{+\infty} x^n S_n(\theta) \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) \right| + \frac{1}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \end{aligned}$$

puis, (à nouveau, toutes les convergences utiles ont été prouvées précédemment), que

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

par télescopage, $\sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{N}$, d'où l'inégalité demandée :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{2}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

2.a. Si $x = 0$, les séries $\sum_{n \geq 1} n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n$ sont trivialement convergentes, de sommes nulles.

Pour $x \neq 0$, $|x| < 1$, leurs termes généraux ne s'annulent pas, et l'on a

$$\lim \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \right| = |x| < 1. \text{ D'après la règle de d'Alembert,}$$

$$\sum_{n \geq 1} nx^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} n^2 x^n \text{ convergent.}$$

$$\text{On a } (1-x)S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)x^n \text{ (les séries mises en jeu}$$

$$\text{sont bien convergentes), donc } (1-x)S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$

$$\text{On reconnaît une somme de série géométrique (convergente) : } (1-x)S_1 = \frac{x}{1-x}, \text{ d'où bien sûr et}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}}.$$

De même,

$$\begin{aligned} (1-x)S_2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)x^n \\ &= 2S_1 - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n. \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que } S_2 = \frac{1}{1-x} \left(\frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \right) = \boxed{\frac{x+x^2}{(1-x)^3}}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n$ n'intervient pas dans la suite du problème, c'était là encore une question de technique

en passant.

2.b. Soient donc $\theta \in]0, \pi[$, et h non nul tel que $\theta + h \in]0, \pi[$.

$$\text{D'après A.4. , pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \left| \sin(n(\theta + h)) - \sin(n\theta) - nh \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 n^2}{2},$$

donc

$$\left| \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 n}{2} x^n.$$

La convergence de la série $\sum_{n \geq 1} n x^n$ prouve, par majoration, celle de la série (de terme général positif)

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right|, \text{ et fournit}$$

l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n,$$

$$\text{soit : } \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 x}{2(1-x)^2}.$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right) \text{ est alors}$$

absolument convergente, donc convergente, et par inégalité des valeurs absolues,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 x}{2(1-x)^2}.$$

Enfin, la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n}$ et

$\sum_{n \geq 1} x^n (-1)^n \cos(n\theta)$ (prouvées précédemment) autorise le découpage de la somme :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n(\theta + h))}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{h^2 x}{2(1-x)^2},$$

$$\text{soit : } \boxed{\left| f_x(\theta + h) - f_x(\theta) - h \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \sin(n\theta) \right| \leq \frac{h^2}{2} \frac{x}{(1-x)^2}}.$$

2.c. En divisant par $|h|$ l'inégalité précédente, il vient :

$$\left| \frac{f_x(\theta + h) - f_x(\theta)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta) \right| \leq \frac{|h|}{2} \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(\theta + h) - f_x(\theta)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta)$. Par définition d'un nombre

dérivé, ceci prouve que f_x est dérivable en tout θ de $]0, \pi[$, et que :

$$\boxed{\forall \theta \in]0, \pi[, f'_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta)}.$$

2.d. D'après la question précédente, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$f'_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (-1)^n \cos(n\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(n(\theta + \pi)),$$

d'où, d'après **A.2.** :

$$f'_x(\theta) = \frac{-x^2 + x \cos(\theta + \pi)}{x^2 - 2x \cos(\theta + \pi) + 1},$$

$$\text{soit } \boxed{\forall \theta \in]0, \pi[, f'_x(\theta) = \frac{-x^2 - x \cos(\theta)}{x^2 + 2x \cos(\theta) + 1}}.$$

2.e. D'après **d.** et **A.6.**, on a $f'_x = U'_x$ sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Il existe donc une constante K_x telle que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\boxed{f_x(\theta) = U_x(\theta) + K_x = \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) + K_x}.$$

3.a. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = 0$, donc, par définition d'une

$$\text{limite : } \boxed{\exists \alpha \in]0, \pi[, \forall \theta \in]0, \alpha[, \left| \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon}.$$

3.b. Soit $\varepsilon > 0$.

• D'après **1.d.**, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{2}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \text{ donc pour tout } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[,$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{N}. \text{ Comme } \lim_{N \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{2}}{N} = 0, \text{ on en déduit qu'il existe } N_0 \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{tel que pour tout } N \geq N_0, \text{ pour tout } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

•• En particulier, pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ $\left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$

D'autre part, d'après **a.**, il existe $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que pour tout $\theta \in \left]0, \alpha\right[$,

$$\left| \sum_{n=1}^{N_0} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $\theta \in \left]0, \alpha\right[$,

$$|f_x(\theta)| \leq \left| \sum_{n=1}^{N_0} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| + \left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq 2\varepsilon.$$

On récapitule : on a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\forall \theta \in \left]0, \alpha\right[$, $|f_x(\theta)| \leq 2\varepsilon$:

c'est dire que $\boxed{\lim_{\theta \rightarrow 0} f_x(\theta) = 0}$.

3.c. On a $\lim_{\theta \rightarrow 0} f_x(\theta) = 0$, et $f_x(\theta) = \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) + K_x$ pour tout $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

Or $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)} = +\infty$, d'où $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que $\boxed{K_x = -\frac{\pi}{2}}$, et ainsi pour tout $\theta \in \left]0, \pi\right[$,

$$\boxed{f_x(\theta) = \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) - \frac{\pi}{2}}.$$

4.a. C'est reparti pour un tour :

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n}$, donc, et à nouveau

par définition d'une limite :

il existe $\alpha \in \left]0, 1\right[$ tel que pour tout $x \in \left]1 - \alpha, 1\right[$:

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

4.b. A peu près la même chose qu'en **3.b.**, en un petit peu plus facile :

Soit $\varepsilon > 0$.

A nouveau d'après **1.d.**, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{2}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{2}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \text{ et } \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 0, \text{ il existe donc } N_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que}$$

$$\text{pour tout } N \geq N_0, \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon \text{ et } \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

•• On a donc, en particulier, $\left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon$ et

$$\left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après **a.**, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in]1 - \alpha, 1[$,

$$\left| \sum_{n=1}^{N_0} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - \sum_{n=1}^{N_0} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $x \in]1 - \alpha, 1[$, on a donc

$$\begin{aligned} |f_x(\theta) - f_1(\theta)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{N_0} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} - \sum_{n=1}^{N_0} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{x^n (-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right| + \left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} \right|, \end{aligned}$$

d'où $|f_x(\theta) - f_1(\theta)| \leq 3\varepsilon$, et ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in]0, 1[, \forall x \in]1 - \alpha, 1[, |f_x(\theta) - f_1(\theta)| \leq 3\varepsilon :$$

Par suite, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f_x(\theta) = f_1(\theta)}$.

4.c. On a montré que pour tout $\theta \in]0, \pi[$ $f_x(\theta) = \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) - \frac{\pi}{2}$, et que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_x(\theta) = f_1(\theta). \text{ Par continuité de la fonction } x \mapsto \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + 1}{x \sin(\theta)}\right) - \frac{\pi}{2}, \text{ on en}$$

déduit que $f_1(\theta) = \arctan\left(\frac{\cos(\theta) + 1}{\sin(\theta)}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Transformons cette expression. On a

$$f_1(\theta) = \arctan\left(\frac{\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) + 1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}\right) - \frac{\pi}{2},$$

d'où $f_1(\theta) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right) = -\frac{\theta}{2}$.

Autrement dit,
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\theta)}{n} = -\frac{\theta}{2}}.$$

4.d. On choisit $\theta = \frac{\pi}{2}$, et alors d'après **c.**,
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m} = -\frac{\pi}{4}.$$

Dans cette expression :

- lorsque m est pair, on peut poser $m = 2n$ avec n entier, et $\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$.
- • Si m est impair, on pose $m = 2n + 1$ et

$$\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

Il résulte de ceci que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m} &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^m \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1} (-1)^n}{2n+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \end{aligned}$$

et l'égalité $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m} = -\frac{\pi}{4}$ donne le résultat attendu :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}.$$

Problème 2 : étude d'un procédé de sommation

Partie I : deux exemples

1) Ici a_n ne dépend pas de n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha.$$

Or d'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \alpha.}$$

Comme α est non nul, les deux séries divergent grossièrement (puisque leur terme général ne converge pas vers 0 !).

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ divergent grossièrement.}}$$

2) a) À nouveau j'applique la formule du binôme (1 et z commutent !)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (1+z)^n,$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.}$$

b) (i) Ici $|z| < 1$, donc, d'après le cours sur les séries géométriques :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge et sa somme est } A(z) = \frac{1}{1-z}.$$

(ii) De plus, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{1+z}{2} \right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1 \quad \text{car } |z| < 1.$$

Donc $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z}$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ converge et sa somme est } 2A(z).}$$

c) (i) Ici $|z| \geq 1$, donc la suite (a_n) ne converge pas vers 0 :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

(ii) Pour $z = -2$, $a_n^* = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ est une série géométrique convergente.}}$$

(iii) Soit maintenant $z = e^{i\theta}$. Alors

$$\frac{1+z}{2} = e^{i\theta/2} \cdot \frac{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}}{2} = e^{i\theta/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}.$$

Ainsi, $\cos$ étant une fonction paire,

$$\left| \frac{1+z}{2} \right| = \cos \frac{|\theta|}{2} \in]0, 1[\quad \text{car } 0 < \frac{|\theta|}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ converge.}}$$

De plus, le calcul de somme du b) reste valable :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z} = \frac{2e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{2e^{-i\theta/2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{i (\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2})}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 1 + i \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.}$$

Partie II : étude du procédé de sommation

1) a) (i) k étant fixé, j'ai

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

car chacun des k facteurs du numérateur est équivalent à n lorsque $n \rightarrow \infty$.

$$\boxed{\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.}$$

(ii) Donc $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n^k}{2^n}$; d'où, selon les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles (k est fixé et $2 > 1$) :

$$\boxed{\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.}$$

b) D'après a), pour chaque valeur de k fixée dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, a_k étant une constante, j'ai $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
La suite de terme général $S_q(n, a)$ apparaît donc comme la somme de $q+1$ suites qui convergent toutes vers 0 (avec q fixé). Par conséquent, selon les théorèmes opératoires classiques,

$$\boxed{S_q(n, a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.}$$

c) Tout cela fait penser à CÉSARO... Soit $\varepsilon > 0$; puisque (a_n) converge vers 0, je dispose de $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq q \quad |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et j'écris, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq q \quad |a_n^*| \leq |S_q(n, a)| + \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} |a_k| \leq |S_q(n, a)| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car} \quad \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \leq \frac{1}{2^n} \text{ (cf. I - 1)a)}.$$

Et d'après b), q étant ainsi fixé, je dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1 \quad |S_q(n, a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, en posant $n_0 = \max(q, n_1)$, j'ai

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n^*| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, par définition de la limite,

$$\boxed{a_n^* \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty.}$$

d) Toujours d'après I - 1)a), je peux écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ell = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ell \quad \text{d'où} \quad a_n^* - \ell = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n - \ell)$$

et comme par hypothèse la suite $(a_n - \ell)$ converge vers 0, le c) s'applique et montre que $(a_n^* - \ell)$ converge également vers 0. Autrement dit

$$\boxed{a_n^* \text{ tend vers } \ell \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty.}$$

e) On vient de voir que la convergence de (a_n) entraîne celle de (a_n^*) , mais le I - 2)c)(ii) fournit un contre-exemple de la réciproque !

2) a) Je note que

$$\forall n \geq 1 \quad U_n = 2^n (T_{n-1} + a_n^*) = 2U_{n-1} + 2^n a_n^*.$$

Il vient successivement, en regroupant pour U_2 et U_3 les termes à partir des indices les plus élevés :

$$\begin{aligned} U_0 &= a_0^* = a_0 = S_0 \\ U_1 &= 2S_0 + (a_0 + a_1) = 2S_0 + S_1 \\ U_2 &= 2(2S_0 + S_1) + (a_0 + 2a_1 + a_2) = 3S_0 + 3S_1 + S_2 \\ U_3 &= 2(3S_0 + 3S_1 + S_2) + (a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3) = 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3 \end{aligned}$$

b) (i) On peut apparemment conjecturer

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n : U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \quad \text{où} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \lambda_{n,k} = \binom{n+1}{k+1} .}$$

(ii) Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}_n$ ci-dessus est vraie pour tout n .

Initialisation : on a vu au a) que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Hypothèse de récurrence : je considère $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie et je reprends la remarque ci-dessus, avec l'indication de l'énoncé.

$$\begin{aligned} U_n &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (S_k - S_{k-1}) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k \quad (\text{en réindexant la dernière somme, avec } S_{-1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right] S_k + S_n \quad (\text{en mettant de côté le dernier terme}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} S_k + S_n \quad (\text{d'après la relation du triangle de PASCAL}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k \quad (\text{car } \binom{n+1}{n+1} = 1 !) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie, ce qui achève cette démonstration par récurrence.

c) On suppose ici que $\sum a_n$ converge, c'est-à-dire (en notant S sa somme), que la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S . Si je pose alors

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad A_j = S_{j-1},$$

la suite (A_n) converge vers S comme (S_n) , or avec les notations précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = \frac{1}{2^n} U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k = 2 \cdot \left[\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} A_j \right].$$

Or dans ce dernier crochet, je reconnais l'expression de A_{n+1}^* , construite à partir de la suite (A_n) par le procédé "habituel". Or (A_n) converge vers S , donc le 1)d) montre que (A_n^*) également, donc la suite (T_n) converge vers $2S$. Mais cette suite n'est autre que la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n^*$!! En conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ converge et sa somme vaut } 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n .}$$

d) On vient de voir que la convergence de $\sum a_n$ entraîne celle de $\sum a_n^*$, mais le I - 2)c)(ii) fournit à nouveau un contre-exemple de la réciproque !