

Chapitre 2

Convergences et approximations

I INÉGALITÉS PROBABILISTES

1. Inégalité de Markov

Théorème (Markov)

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$.

Alors pour tout $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

Démonstration (à connaître ! C'est la même que pour les variables discrètes...)

On considère la variable aléatoire Y définie par :
$$\begin{cases} Y = 1 & \text{si } X \geq \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, Y est la var. indicatrice de l'évènement $(X \geq \lambda)$: $Y = \mathbf{1}_{[\lambda, +\infty[}(X)$.

Alors, Y est une variable de Bernoulli, de paramètre $p = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$;

par suite, Y possède une espérance, et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$.

D'autre part, on note que l'on a $\begin{cases} \lambda Y = \lambda & \text{si } X \geq \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et, comme X est à valeurs positives, il en

résulte que λY est inférieure à X .

On en déduit, par propriété de croissance de l'espérance, que $\mathbb{E}(\lambda Y) \leq \mathbb{E}(X)$, puis, par linéarité,

que $\lambda \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$. On a donc $\lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X)$. $\square$

Exercice 1

On considère une var X suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. A l'aide de l'inégalité de Markov, donner une majoration de $\mathbb{P}(X > \lambda)$.

2. Comment choisir λ de manière à ce que le résultat précédent assure que $\mathbb{P}(X > \lambda) < 10^{-4}$?
3. Pour de vrai, pour quelles valeurs de λ a-t-on $\mathbb{P}(X > \lambda) < 10^{-4}$?

Exercice 2

Une inégalité de Kolmogorov

Soit X une var. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

On suppose X bornée, i.e. que : $\exists \beta \in \mathbb{R}_+^* / \forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq \beta$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\mathbb{P}(|X| > \alpha) \geq \frac{\mathbb{E}(X^2) - \alpha^2}{\beta^2}$.

hint On copiera honteusement la démonstration faite en cours de l'inégalité de Markov, en faisant intervenir la var $Y = \mathbf{1}_{[\alpha^2, \beta^2]}(X^2)$.

2. Inégalité de Bienaymé – Tchebychev (même énoncé que pour les vards)

Théorème (Bienaymé – Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire admettant une variance $\mathbb{V}(X)$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Démonstration (la même que pour les vards)

La variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2, elle admet donc également une espérance ; on peut donc définir la var. $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$. Y est alors clairement à valeurs positives, et, par définition d'une variance, $\mathbb{E}(Y)$ existe et vaut $\mathbb{V}(X)$. Il est donc licite d'appliquer l'inégalité de

Markov à Y . Il vient $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2}$,

soit $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$,

et l'on a donc bien $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$. □

Exemple

Exercice 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion de boules blanches présentes dans l'urne est $p \in]0, 1[$. On effectue n tirages successifs et avec remise d'une

boule. Soit X_n la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues en n tirages.

1. Donner la loi de X_n .

2. Montrer que $\mathbb{V}(X_n) \leq \frac{n}{4}$.

3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev, donner une majoration de

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right).$$

4. Comment doit-on choisir n pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que $\frac{X_n}{n}$ est une valeur approchée de p à 10^{-2} près ?

3. Notion de convergence en probabilité

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit Y une variable aléatoire définie sur ce même espace. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers Y , lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$.

4. Loi faible des grands nombres (même énoncé que pour les vards)

a. Espérance et variance d'une moyenne (même résultat que pour les vards)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, admettant une espérance commune μ et une variance commune σ^2 .

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ admet une espérance et une variance, et l'on a :

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) = \mu, \text{ et } \mathbb{V} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Démonstration

Les variables aléatoires X_k admettant toutes μ pour espérance, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ possède donc elle aussi une espérance, et par linéarité $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu$; de plus, les var. X_k possèdent toutes une variance, $\mathbb{V}(\bar{X}_n)$ en a donc une elle aussi. On a $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{V} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)$, puis par

indépendance (donc non – corrélation) : $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} (n \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$.

b. Théorème : loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé,

indépendantes, admettant une espérance commune μ et une variance commune σ^2 .

Alors pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Autrement dit, et sous ces hypothèses, la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la var. certaine égale à μ .

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Bienaymé – Tchebycheff à la var. $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, en commençant par reprendre ce qui précède : toutes les variables aléatoires X_k admettant μ pour espérance, $\bar{X}_n$ possède elle aussi une espérance, et par linéarité $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu$; de plus, les var. X_k possèdent toutes une variance, $\mathbb{V}(\bar{X}_n)$ en a donc une elle aussi.

On a $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$, puis par indépendance (donc non –

corrélations) : $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} (n \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$. Les hypothèses d'application de

l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev sont bien réunies ; on obtient pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}, \text{ d'où } 0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}.$$

On en déduit, par encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Remarque

Ce résultat reste vrai avec l'hypothèse plus faible : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, non corrélées, admettant une espérance commune μ et une variance commune σ^2 .

c. *Exemple*

Exercice 4

1. Enoncer et démontrer le théorème de stabilité des lois de Poisson.
2. Montrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1, suit la loi de Poisson de paramètre n .

3. On pose $Q_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$.

Montrer en vous aidant de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(n) = 1$.

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx$.

II APPROXIMATIONS

1. Convergence en loi

a. Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit Y une variable aléatoire définie sur ce même espace probabilisé.

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y , et l'on pourra noter

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x), \text{ en tout point } x \text{ où la fonction de répartition de } Y \text{ est continue.}$$

b. Cas discret et continu

- Lorsque Y est une variable aléatoire discrète :

la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y si et seulement si :

$$\forall x \in Y(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x).$$

Et pourtant, les éléments de $Y(\Omega)$ sont justement les points où la fonction de répartition de Y peut ne pas être continue... c'est comme ça.

- • Lorsque Y est une variable aléatoire à densité, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$.

2. Les approximations usuelles

Cf. le petit schéma joint en annexe, que l'on détaille ci – dessous.

3. Approximation de lois hypergéométriques par des lois binomiales *Hors - programme*

a. Théorème

Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, $q = 1 - p$, et n un entier positif ou nul. On considère une suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à n et tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pN_k est un entier. Soit enfin $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k suit la loi $\mathcal{H}(N_k, n, p)$;
- • $\lim_{k \rightarrow +\infty} N_k = +\infty$.

Alors : $\forall j \in]0, n[, \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$.

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire discrète X suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration

Lorsque X suit la loi $\mathcal{H}(N_k, n, p)$, on a pour tout $j \in]0, n[$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = j) &= \frac{\binom{pN_k}{j} \binom{qN_k}{n-j}}{\binom{N_k}{n}} = \frac{\frac{(pN_k)!}{j!(pN_k-j)!} \frac{(qN_k)!}{(n-j)!(qN_k-n+j)!}}{\frac{N_k!}{n!(N_k-n)!}} \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{\frac{(pN_k)!}{(pN_k-j)!} \frac{(qN_k)!}{(qN_k-n+j)!}}{\frac{N_k!}{(N_k-n)!}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = j) &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{\prod_{i=0}^{j-1} (pN_k - i) \prod_{i=0}^{n-j-1} (qN_k - i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (N_k - i)} \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(pN_k)^j (qN_k)^{n-j}}{(N_k)^n} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \end{aligned}$$

et l'on a le résultat voulu.

b. Conséquence pratique

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ (où n et N sont deux entiers tels que $1 \leq n \leq N$, et $p \in]0, 1[$ un réel tel que Np soit entier). Si N est "grand" devant n , alors on peut approcher la loi de X par la loi $\mathcal{B}(n, p)$. En pratique, on considérera que cette approximation est correcte lorsque $N > 10n$. On s'autorisera alors à écrire :

$$\forall j \in [0, n], \mathbb{P}(X = j) \approx \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \text{ avec } q = 1 - p.$$

4. Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson

a. Théorème

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$, et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.

On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$;
- La suite $(np_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel λ strictement positif.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire discrète X suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \right) p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k!} (n + o(n))^k \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n-k} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k!} (1 + o(1)) \lambda^k \exp \left((n-k) \ln \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k!} (1 + o(1)) \lambda^k \exp \left((n-k) \left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k!} (1 + o(1)) \lambda^k \exp(-\lambda + o(1)), \end{aligned}$$

et l'on en conclut que $\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$

b. Conséquence pratique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ "suffisamment grand" et $p \in [0, 1]$ "suffisamment petit", tels que le produit $\lambda = n p$ ne soit "pas trop grand", on peut approcher la loi d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

En pratique, on jugera cette approximation possible lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $n p \leq 10$; on

s'autorisera alors à écrire : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

5. Théorème de la limite centrée

a. Version 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi, admettant une espérance commune μ et une variance commune non nulle σ^2 .

$$\text{Soit } S_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n \mu}{\sqrt{n} \sigma}.$$

$$\text{Alors, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x).$$

Autrement dit, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

b. Version 2

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi, admettant une espérance commune μ et une variance commune non nulle σ^2 .

$$\text{Soient } \overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \text{ et } \overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\overline{X}_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x).$$

Là encore, ceci revient à dire que $(\overline{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

6. Approximation de lois binomiales par des lois normales

a. Théorème (de Moivre – Laplace)

Soit $p \in]0, 1[$, et $q = 1 - p$. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}.$$

Alors, en notant $\Phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n \leq x) = \Phi(x).$$

b. Conséquence pratique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, et X_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Lorsque n est "assez grand", et p "ni trop proche de 0, ni trop proche de 1", on peut approcher la loi de X_n en utilisant la loi centrée réduite, de la manière suivante :

- On écrit, pour tout réel x : $\mathbb{P}(X_n \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right)$.
- • On écrit, pour tout $k \in]0, n[$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

On dit que l'on effectue une "correction de continuité".

On conviendra que ces approximations sont acceptables lorsque $np > 15$, $nq > 15$ ou $n \geq 30$, p proche de 0,5.

7. Approximation de lois de Poisson par les lois normales

a. Théorème

Soit λ un réel strictement positif, et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. Posons

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n^* = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}.$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n^* \leq x) = \Phi(x).$

b. Conséquence pratique

Soit $\mu > 0$, supposé "assez grand" (dans la pratique, $\mu > 15$), et X_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\mu)$. On approche la loi de X_n par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sqrt{\mu})$, et ce de la manière suivante:

- On remplace, pour tout réel x , $\mathbb{P}(X_n \leq x)$ par $\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{\mu}}\right)$.
- • On remplace, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ par $\mathbb{P}\left(k - \frac{1}{2} \leq X_n \leq k + \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire par $\Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0,5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right)$: on dit que l'on effectue une "correction de continuité".