

Feuille d'exercices

Variables aléatoires à densité

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F .

Pour tout réel p non nul, on définit la fonction G_p par : $\forall x \in \mathbb{R}, G_p(x) = \frac{1}{p} \int_x^{x+p} F(u) du$.

1. Montrer que G_p est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_p .
2. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer G_1 .
3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$). Déterminer $G_{\frac{1}{\lambda}}$.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la valeur de λ , puis donner la fonction de répartition F de X .
2. Soit $Y = X^2 - 5X + 4$. Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de Y .

Exercice 17

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$, et soit $Y = e^{\frac{1}{X}}$.

Déterminer la loi de Y .

Exercice 18

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et toutes de même loi. On pose $m = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $M = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer les lois de m et M :

1. Lorsque $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
2. Lorsque $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Exercice 20

Soit X une VAR à densité définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et suivant la loi uniforme

sur $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$. On pose $Y = \sqrt{|2X|}$.

1. Montrer que Y est une VAR à densité, et en déterminer une densité.

On pose maintenant $Z = \tan(\pi X)$.

2. Montrer que Z est une VAR à densité, et en déterminer une densité.

3. Montrer que $S = \frac{1}{X}$ est une VAR à densité, et déterminer sa loi.

4. Expliquer pourquoi l'on peut définir la VAR $T = \frac{1+X}{1-X}$.

Montrer alors que T est une VAR à densité, et déterminer sa loi.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et X une VAR absolument continue définie sur un espace probabilisé

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ admettant une fonction de densité f continue. On pose alors $Y = X^n$.

Montrer que Y est une VAR absolument continue, et en déterminer une densité.

Exercice 21

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et f l'application définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\lambda}{(1+t)^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

1. Déterminer la valeur de λ pour que f soit une densité de probabilité.

On suppose désormais cette condition remplie. Soit X une VAR à densité définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, de densité f .

2. Expliquer pourquoi l'on peut définir la VAR $Y = X + \frac{1}{X}$.

3. Déterminer l'univers-image $Y(\Omega)$.

4. Montrer que Y est une VAR absolument continue, et déterminer une densité de Y .

Exercice 22

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et f l'application définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\lambda}{1+t} \mathbf{1}_{]0,1[}(t)$.

1. Déterminer la valeur de λ pour que f soit une densité de probabilité.

On suppose désormais cette condition remplie.

Soit X une VAR à densité définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, de densité f .

On définit alors la VAR $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$.

2. Montrer que Y est une VAR absolument continue, et déterminer une densité de Y .

Exercice 23

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement positive, telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

1. On pose, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$. On note F^{-1} sa bijection réciproque.

2. Soit U une VAR absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

On suppose que U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$.

Déterminer la loi de la VAR $X = F^{-1}(U)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Utiliser la question précédente pour déterminer une application Φ de sorte que $X = \Phi(U)$ suive la loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 24

Soit X une variable aléatoire réelle ayant une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une densité de la

variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.

2. On suppose que X suit la loi uniforme sur $]0, a]$. Déterminer la loi de Y .

3. Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$, toutes de loi uniforme sur $]0, a]$.

On pose $Z = \min\left(\frac{1}{X_1}, \dots, \frac{1}{X_n}\right)$. Déterminer la loi de Z .

4. Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Exercice 25

Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On suppose que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X .

2. Calculer $E(X)$.

3. Déterminer une densité de la variable aléatoire $X + Y$, où X et Y sont indépendantes et de même densité de probabilité f .

On rappelle que, lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y , $X + Y$ est une variable aléatoire admettant pour densité la fonction

$$f_{X+Y} : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-x) f_Y(x) dx.$$

Exercice 26

X et Y sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $X - tY$ admet pour densité la fonction h

$$\text{définie par : } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

2. En déduire une densité de $Z = \frac{X}{Y}$.

On admettra que, lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y , $X + Y$ est une variable aléatoire admettant pour densité la fonction

$$f_{X+Y} : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-x) f_Y(x) dx.$$

Exercice 27

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$, et soit $X = -\ln\left(\frac{2U}{U+1}\right)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X .
2. X est-elle une variable à densité ? Si oui, en déterminer une densité.
3. Déterminer l'espérance de X .

Exercice 28

Soit n un entier strictement positif. $\mathcal{E} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

En rangeant, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant, on obtient une nouvelle suite de variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, où pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Y_1(\omega) = \min_{1 \leq i \leq n} (X_i(\omega)), Y_n(\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i(\omega)), \text{ et de manière générale, } Y_k(\omega)$$

est le k -ième des $X_i(\omega)$ après rangement dans l'ordre croissant.

Pour $x \in [0, 1]$, on note N_x le nombre de variables aléatoires X_i telles que $X_i < x$.

1. Déterminer la loi de N_x .
2. Soit r un entier tel que $0 < r < n$. Comparer les événements $(N_x \geq r)$ et $(Y_r < x)$.
3. Déterminer la loi de Y_r . La variable aléatoire Y_r est-elle absolument continue ?

Exercice 29

Espérance & anti-répartition

Soit X une VAR à densité définie sur un probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

On suppose que X admet une densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, et une espérance.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x \mathbb{P}(X > x) \leq \int_x^{+\infty} t f(t) dt$.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbb{P}(X > x) = 0$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \mathbb{P}(X > t) dt = x \mathbb{P}(X > x) + \int_0^x t f(t) dt$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_X(t)) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$ converge, puis que

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_X(t)) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt = \mathbb{E}(X).$$

 Ceci est de plus en plus souvent pris comme **définition** de l'espérance des VAR à densité positives.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et F_n la fonction $x \mapsto F_n(x) = \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

a. Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une VAR à densité T_n .

b. Montrer que T_n admet une espérance qui vérifie : $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}$.

Exercice 30

On admet que, lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y , $X + Y$ est une variable aléatoire admettant pour densité la fonction

$$f_{X+Y} : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-x) f_Y(x) dx.$$

1. Soit $x \in [0, 1]$. On considère l'intégrale $I_x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{x-t}}$.

Prouver la convergence de l'intégrale I_x , et la calculer.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le carré de centre O et de côté

2, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées (x, y) du plan vérifiant $-1 \leq x \leq 1$ et

$-1 \leq y \leq 1$. On choisit un point M au hasard dans ce carré, et l'on cherche la probabilité que ce point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1.

Soit X la VAR égale à l'abscisse de M , et Y la VAR égale à son ordonnée.

On suppose X et Y indépendantes, et distribuées selon la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

2. Exprimer la probabilité cherchée à l'aide de X et Y .
3. Déterminer une densité de la VAR X^2 .
4. Montrer que $Z = X^2 + Y^2$ est une VAR à densité, et en déterminer une densité h .
 Pour déterminer $h(x)$, on discutera selon la position de x par rapport à 0, 1, et 2, et on laissera $h(x)$ sous forme intégrale sur l'intervalle $]1, 2]$.
5. Calculer la probabilité que M soit dans le disque de centre O et de rayon 1.
6. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 31

Premiers pas vers les processus de Poisson

On admet que, lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y , $X + Y$ est une variable aléatoire admettant pour densité la fonction

$$f_{X+Y} : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-x) f_Y(x) dx.$$

Des personnes arrivent de façon aléatoire dans une salle d'attente.

On suppose que la VAR N_t égale au nombre de ces personnes arrivant entre les instants 0 et t ($t \in \mathbb{R}_+^*$) suit une loi de Poisson de paramètre λt ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

1. On désigne par X_1 la VAR égale à l'instant d'arrivée de la première personne.
 - a. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > t)$, puis reconnaître la loi de la VAR X_1 .
 - b. Donner alors sans calculs les valeurs de $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n la VAR égale à l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ème}}$ personne.
 - a. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, F_{X_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.
 - b. En déduire une densité f_n de X_n , ainsi que $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
3. Retrouver tous les résultats précédents en introduisant les VAR $(T_k)_{1 \leq k \leq n}$, où T_1 désigne la VAR égale au temps d'attente de l'arrivée de la première personne, et où pour tout entier $k \in \{2, n\}$, T_k désigne la VAR égale au temps d'attente de l'arrivée de la $k^{\text{ème}}$ personne, une fois arrivée la $(k-1)^{\text{ème}}$.

hint On établira un lien évident entre X_n et les $(T_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Problème 1 (Edhec AST1 2022)

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On note F la fonction de répartition commune aux variables $X_1, X_2, X_3, \dots$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on admet que S_n est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) Soit F_n la fonction de répartition de S_n .

a) Justifier que l'on a l'égalité entre événements suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, (S_n \leq x) = \bigcap_{k=1}^n (X_k \leq x)$.

b) En déduire $F_n(x)$ pour tout réel x .

c) Montrer que S_n est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f_n définie ci-dessous par : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

2) Montrer que S_n possède une espérance (on ne demande pas de la calculer).

3) a) Établir l'égalité : $E(S_n) = \int_0^{+\infty} (1 - (1 - e^{-x})^n) dx$.

b) En déduire que l'espérance de S_n est donnée par : $E(S_n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

4) Dans cette question, on se propose de déterminer une autre expression de $E(S_n)$ et pour ce faire, on admet le résultat suivant :

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives f_X et f_Y nulles sur $\mathbb{R}_-^*$, l'une au moins de ces deux densités étant bornée, alors une densité de $X + Y$ est la fonction f_{X+Y} , nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_{X+Y}(x) = \int_0^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$, où les X_i sont toujours les variables aléatoires présentées au début de l'exercice. On admet que les variables aléatoires $\frac{X_i}{i}$ sont à densité et qu'il en est de même pour T_n .

a) Déterminer, à l'aide de F , la fonction de répartition G_{n+1} de la variable aléatoire $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ puis en donner une densité g_{n+1} , et vérifier que g_{n+1} est bornée.

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est une densité de T_n .

c) Donner alors une nouvelle expression de l'espérance de S_n sous forme de somme puis en déduire la formule sommatoire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

d) Montrer que S_n possède une variance et l'exprimer sous forme de somme.

5) Une dernière façon de calculer $E(S_n)$.

a) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(t) - f_n(t) = \frac{-1}{n+1} f'_{n+1}(t)$.

b) Pour tout réel x positif, on pose $J_n(x) = \int_0^x t f_n(t) dt$. Montrer que

$$J_{n+1}(x) - J_n(x) = -\frac{1}{n+1} x f_{n+1}(x) + \frac{1}{n+1} \int_0^x f_{n+1}(t) dt$$

c) En déduire l'égalité :

$$E(S_{n+1}) - E(S_n) = \frac{1}{n+1}$$

d) Retrouver finalement l'expression de $E(S_n)$ obtenue à la question 4).

6) Une nouvelle variable aléatoire.

Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln V$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont on note F_W la fonction de répartition. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

7) Une convergence en loi.

On pose $W_n = S_n - \ln n$ et on note F_{W_n} la fonction de répartition de W_n .

a) Établir l'égalité $F_{W_n}(x) = F_n(x + \ln n)$ pour tout réel x .

b) Soit x un réel fixé. Montrer que, pour n assez grand, on a $F_{W_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (W_n) converge en loi vers W .

Problème 2 (Edhec AST1 2021)

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4) Vérifier que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et ayant f pour densité.

5) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X .

- 6) a) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
b) Montrer que X possède également une variance et la calculer.

7) On considère maintenant une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X .

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- a) Déterminer la fonction de répartition, notée F_n , de la variable aléatoire I_n .
b) La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?
c) Déterminer une densité de I_n , puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 :

$$E(I_n^2) = 2 \int_0^{\pi/2} x (\cos x)^n dx$$

- d) Établir que : $E(I_n^2) \leq \pi u_n$.

e) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

8) Soit h la restriction de la fonction cosinus à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

b) Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. On admet alors que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition G de Y , puis vérifier que Y suit une loi uniforme.