PC - Lakanal

2026-2027

Programme de colles S4 (probas)

Semaine du 12 – 10 au 16 – 10

Dénombrement

Révisions de première année

Espaces probabilisés

I. Espaces probabilisables

Ensembles finis, ensembles dénombrables. Tribu (ou σ – algèbre), espace probabilisable. Vocabulaire : univers, évènement, évènement contraire, évènement impossible. Propriétés de base des tribus.

II. Espaces probabilisés finis

Mesure de probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{P}\left(\Omega\right)\right)$, Ω fini non vide, + propriétés : rappels de première année.

III. Espaces probabilisés quelconques

Mesure de probabilité sur un espace probabilisable $\left(\Omega, \mathcal{T}\right)$. Vocabulaire : événements quasi – impossibles, quasi – certains, propriété vraie presque sûrement, etc.

Premières propriétés : $\mathbb{P}\left(\varnothing\right) = 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$, croissance pour l'inclusion, formule des quatre cardinaux pour les mesures de probabilité.

Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable :

Soient Ω un univers dénombrable, $\Omega = \left\{\omega_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $\left(p_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\begin{cases} \bullet & \forall\, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_k \left(\leq 1\right) \\ \bullet\bullet & \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{cases}$. Alors :

- il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{P}\left(\Omega\right)\right)$ telle que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega_k\right\}\right) = p_k$.

$\bullet\bullet$ $\forall\, A \in \mathcal{P}\left(\Omega\right),\ \mathbb{P}\left(A\right) = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ \omega_k \in A}}^{+\infty} p_k$.

IV. Systèmes complets ou quasi – complets d'événements

Définitions.

Propriété : si $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi – complet d'événements, alors pour tout événement A,

$\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right)$ converge, et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \cap A\right) = \mathbb{P}\left(A\right)$.

Inégalité de Boole :

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé, soit $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i\right)$ converge : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$.

V. Théorèmes de continuité (ou de limite monotone) pour une probabilité

Soit $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un univers probabilisé. Pour toute suite $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.
- $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.

Cas d'une suite croissante ou décroissante au sens de l'inclusion.

VI. Probabilités conditionnelles

Définition. Propriété : $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{T}\right)$. Conséquences immédiates.

VII. Indépendance

Indépendance de deux évènements ; caractérisation via les probas conditionnelles ; A et B sont indépendants ssi A et $\overline{A}$ le sont.

Indépendance mutuelle d'une famille d'évènements. L'indépendance deux à deux ne sert pas à grand – chose, et n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

VIII. Les trois formules reines des probabilités

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Dans cette formule, on adopte la convention moche mais pratique, imposée par le programme :

on convient ici de poser $\mathbb{P}_{A_i}\left(B\right)\mathbb{P}\left(A_i\right) = 0$ lorsque A_i est négligeable.

Formule de Bayes.

Variables aléatoires discrètes

I. Variables aléatoires réelles discrètes

1. Variable aléatoire réelle discrète

2. Loi d'une variable aléatoire réelles discrète ; caractérisation

3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition, premières propriétés.

Dans le cas d'une vard à valeurs entières, expression de la fonction de répartition à l'aide de la loi de probabilité, de la loi de probabilité à l'aide de la fonction de répartition ou de l'antirépartition.

II. Lois discrètes usuelles

Variable aléatoire quasi – certaine, lois de Bernoulli, uniformes discrètes, binomiales.

Lois géométriques. Caractérisation par la propriété d'amnésie.

Lois de Poisson. Conditionnement Poisson / binomial (pas un résultat du cours, mais à savoir faire en pratique).

Interprétation en terme de loi des évènements rares (loi de Poisson vu comme loi limite de lois binomiales).

Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

III. Indépendance ; théorèmes de stabilité

Admis : toute fonction d'une ou plusieurs variables aléatoires, est encore une variable aléatoire discrète.

Indépendance de deux vards. Famille de vards (mutuellement) indépendantes. Caractérisations.

Théorèmes de stabilité des lois binomiales et de Poisson.

IV. Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. Définition, linéarité, propriété de croissance, formule du transfert.
2. Moments : définition. Si X admet un moment d'ordre r, elle possède un moment de tout ordre inférieur.

3. Variance définition, premières propriétés.
4. Espérance et variance des lois usuelles.

V. Couples aléatoires discrets

1. Définition. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles. Caractérisation de l'indépendance via icelles.
2. Caractérisation des lois de couples aléatoires discrets. Obtention des lois marginales à l'aide de la loi du couple.
3. Formule du transfert pour l'espérance d'une fonction d'un couple de vards.
4. Application à l'espérance d'un produit. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
5. Covariance, coefficient de corrélation : définition, propriétés. Indépendance et non – corrélation. Conséquence : variance d'une somme de vards indépendantes. Inégalités de Cauchy – Schwarz, et cas d'égalité.

VI. Inégalités probabilistes

1. Inégalités de Markov
2. Inégalité de Bienaymé – Tchebycheff.
3. Loi faible des grands nombres.

VII. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. **Formule de l'espérance par antirépartition**

Ne sont pas encore au programme de colle :

- **Les fonctions génératrices d'une variable aléatoire à valeurs entières.**

Après les vacances

Déterminants, algèbre linéaire : essentiellement des révisions de première année.

Des questions de cours possibles

1. **Théorèmes de continuité pour les probabilités : au choix : cas croissant, cas décroissant.**
2. **Exercice classique : premier lemme de Borel-Cantelli.**

   Soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geq p} A_n \right)$.

   a. Interpréter l'évènement A.
3. **Exercice classique : second lemme de Borel-Cantelli.**

   Soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geq p} A_n \right)$.

   a. Interpréter l'évènement A.

   b. Montrer que si la série $\left(\sum P\left(A_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors $P(A) = 1$.
4. **Exercice classique : conditionnement Poisson/binomial**

Une tortue pond des œufs. Le nombre d'œufs est modélisé par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot avec probabilité $p \in]0,1[$.

- Donner la loi du nombre D de descendants.
- Rappeler la définition de variables aléatoires indépendantes.
- Soit E le nombre d'œufs n'ayant pas éclot. D et E sont-elles indépendantes ?

5. **Lois géométriques : définition, schéma usuel, antirépartition, espérance, variance.**
6. **Lois de Poisson : définition, espérance, variance.**
7. **Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson :**

   Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$;
   - •• La suite $(n p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ strictement positif.

   Alors : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

8. **Théorème de stabilité des lois de Poisson.**
9. **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff**
10. **Loi faible des grands nombres**