PC - Lakanal

2026-2027

Programme de colles S2 (séries)

Semaine du 28 – 09 au 02 – 10

Suites numériques

Révisions de première année

Séries numériques

I. Convergence d'une série numérique

1. **Définitions :** série numérique ; sommes partielles d'une série ; nature, somme d'une série.
2. **Premières propriétés :** linéarité ; invariance de nature par troncature, convergence des séries complexes.
3. **Liens entre restes, sommes partielles, et terme général d'une série convergente**

II. Premiers critères de convergence

1. **Le théorème de convergence par majoration pour les séries à terme général positif**

   Version majoration de la suite des sommes partielles, version majoration du terme général ; versions o, O, $\sim$.

2. **Divergence grossière ; convergence absolue**

   Notion de séries semi - convergentes. La suite $\left(u_n\right)$ est dite sommable lorsque la série $\sum u_n$ converge absolument.

III. Séries usuelles : séries géométriques, géométriques dérivées première et seconde, exponentielles ; séries de Riemann

IV. D'autres critères de convergence

1. **Comparaison série / intégrale**
   a. **Premières notions sur les intégrales généralisées**

   Nature de $\int_a^{+\infty} f\left(t\right) \mathrm{d}t$, f étant continue par morceaux et (pour l'instant) positive sur $[\,a, +\infty[\,$. Les propriétés nécessaires à l'établissement des résultats qui suivent ont été données, mais l'étude des intégrales généralisées sera l'objet d'un chapitre ultérieur.

   b. **Technique de comparaison série/intégrale**

   Application aux séries de Riemann. On doit pouvoir traiter le cas des séries de Bertrand.

2. **Comparaison à des séries usuelles**
   a. **Comparaison à une série géométrique :** règle de d'Alembert.
   b. **Comparaison à une série de Riemann :** règle du "$n^{\alpha}\, u_n$"

3. **Théorème spécial des séries alternées**

   + Encadrement de la somme, signe du reste et majoration de sa valeur absolue.

V. Produits de Cauchy ; formule de Stirling ; (preuves non exigibles).

Des questions de cours possibles

- Convergence d'une série à terme général complexe :

  Soit une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de terme général complexe.

Alors, $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} \mathrm{Re}\left(u_n\right)$ et $\sum_{n \geq n_0} \mathrm{Im}\left(u_n\right)$ convergent, et lorsque tel est le cas : $\mathrm{Re}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(u_n\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(u_n\right)$.

- Théorème de comparaison pour les séries à terme général positif (toute version est exigible).
- La convergence absolue entraîne la convergence.
- Nature des séries géométriques et dérivées secondes ; somme en cas de convergence.
- Convergence et sommes des séries exponentielles : cas réel ou cas complexe.
- Nature des séries de Riemann

  Deux preuves ont été données en cours ; on est libre de choisir celle que l'on préfère.
- Nature des séries de Bertrand
- Règle de d'Alembert
- Théorème spécial des séries alternées

Prévisions pour la semaine 3

Espaces probabilisés, début des variables aléatoires.