Lycée Lakanal



2026 - 2027

PC

# DM N°1

Algèbre linéaire

## Exercice

### *Endomorphismes cycliques*

***Rappel***

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet exactement $n$ racines complexes distinctes qui sont : $1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, ..., e^{i(n-1)\theta}$, avec $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$.

**Définitions**

Soit $E$ un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel.

- On note $Id_E$ l'application identité de $E$.
- Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on note $f^0 = Id_E$, et, pour tout entier naturel $k$,

$$f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f .$$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est ***cyclique d'ordre p*** s'il existe un élément $x_0$ de $E$ vérifiant les trois conditions suivantes :

  - $f^p(x_0) = x_0$
  - La famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\right)$ est génératrice de $E$.
  - La famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\right)$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

  La famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\right)$ est alors appelée un ***p – cycle*** de $f$.

## Partie I *Etude d'un exemple*

Dans cette partie, $E$ est un $\mathbb{C}$ – e.v. de dimension $3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $E$.

On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**1.** Vérifier que $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right)\right)$ est une base de $E$, et déterminer explicitement la matrice de $f$ dans cette base.

**2.** Montrer que $f$ est cyclique d'ordre $4$, et que $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right), f^3\left(e_1\right)\right)$ est un $4$ – cycle de $f$.

**3.** Montrer que $f^4 = Id_E$.

**4.** Montrer que $A$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

## Partie II *Cas général*

Dans cette partie, $E$ est un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension $n$, et l'on considère un endomorphisme $f$ de $E$ cyclique d'ordre $p$. Soit $\left(x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ un $p$ – cycle de $f$.

**1.** Montrer que $p \geq n$ .

**2.** Montrer que $f^p = Id_E$. En déduire que $f$ est un automorphisme de $E$.

**3.** Dans toute la suite, on note $m$ le plus grand des entiers naturels $k$ tels que la famille de vecteurs $\left(x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{k-1}\left(x_0\right)\right)$ soit libre.

**a.** Montrer que $f^m\left(x_0\right)$ est combinaison linéaire des $m$ vecteurs $x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{m-1}\left(x_0\right)$.

**b.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à $m$, le vecteur $f^k\left(x_0\right)$ est combinaison linéaire des $m$ vecteurs $x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{m-1}\left(x_0\right)$.

**c.** En déduire que $m = n$, et que $\left(x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ est une base de $E$.

**4.** On note $a_0, ..., a_{n-1}$ les $n$ nombres complexes tels que :

$$f^n\left(x_0\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\left(x_0\right).$$

**a.** On considère l'endomorphisme $g$ de $E$ défini par : $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ .

- Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $g\left(f^k\left(x_0\right)\right) = f^{n+k}\left(x_0\right)$ .

•• En déduire que : $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ .

**b.** Déterminer, relativement à la base $\left(x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$, et à l'aide des coefficients $a_0, ..., a_{n-1}$, la matrice associée à $f$.

**c.** Montrer que : $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$, $\text{rg}\left(f - \lambda\, Id_E\right) \geq n-1$, et en déduire que $\dim\left(\text{Ker}\left(f - \lambda\, Id_E\right)\right) \leq 1$.

**5.** On suppose dans cette question que $f$ est cyclique d'ordre $n$ (avec $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n$).

Soit $\left(x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ un $n$ – cycle de $f$.

**a.** Montrer que si un nombre complexe $\lambda$ est tel que $\text{Ker}\left(f - \lambda\, Id_E\right) \neq \{0\}$, alors $\lambda^n = 1$.

**b.** Déterminer la matrice de $f$ relativement à la base $\left(x_0, f\left(x_0\right), ..., f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$.

**c.** Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

# Problème soft

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n$.
Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P_k$ le polynôme $X^{k-1}$. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de $P$ et, lorsque $P$ est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de $P$, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.
Pour un ensemble $E$ et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si $f$ est bijective, on note $f^{-1}$ la réciproque de $f$ et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille $p$.

## I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

### I.A L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme $\tau$ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

**I.A.1.** Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

**I.A.2.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de $P$.

**I.A.3.** Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de $\tau$ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de $i$ et $j$.

**I.A.4.** Déterminer les valeurs de $\lambda$ telles que $\det(\lambda I_{n+1} - M) = 0$. Peut-il exister $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$ ?

**I.A.5.** L'application $\tau$ est-elle bijective ? Si oui, préciser $\tau^{-1}$. L'expression de $\tau^j$ trouvée à la question IA2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$ ?

**I.A.6.** Que vaut $M^{-1}$ ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de $i$ et $j$.

**I.A.7.** On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

**I.A.8.** En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{I.2}$$

**I.A.9.** On considère un réel $\lambda$ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

### I.B L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme $\delta$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ :

$$\begin{array}{rccc} \delta\ : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

**I.B.1.** Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

**I.B.2.** En déduire le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme $\delta$.

**I.B.3.** Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{I.3}$$

**I.B.4.** Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

**I.B.5.** Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{I.4}$$

**I.B.6.** Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u\ :\ \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application $u$ existe.

**(a)** Montrer que $u$ et $\delta^2$ commutent.

**(b)** En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application $u$.

**(c)** Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**(d)** Conclure.

**I.B.7.** Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application $\delta$.

**(a)** Pour $P$ polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

**(b)** En déduire que si $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par $\delta$ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

## II Applications en combinatoire

Pour tout couple $(p, k)$ d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

### II.A Quelques cas particuliers

**II.A.1.** Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$ ?

**II.A.2.** Déterminer $S(n, n)$.

**II.A.3.** Déterminer $S(n + 1, n)$.

### II.B Recherche d'une expression générale

**II.B.1.** Combien y a-t-il d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ?

**II.B.2.** Pour $p \geqslant n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k) \tag{II.1}$$

où $S(p,0) = 0$ par convention.

**II.B.3.** En déduire une expression de $S(p,n)$ pour $p \geqslant n$.

**II.B.4.** En relisant la question I.B.5., commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

### II.C

**II.C.1.** Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}$$

## III Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \quad \text{pour } k \in [\![1,n]\!] \end{cases}$$

### III.A Généralités

**III.A.1.** Montrer que la famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**III.A.2.** Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de $H_{k-1}$.

**III.A.3.** La matrice $M$ définie à la question I.A.3. et la matrice $M'$ de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

**III.A.4.** Montrer que, pour $k,l \in [\![0,n]\!]$,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

**III.A.5.** Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n}(\delta^k(P))(0)H_k$$

### III.B Étude d'un exemple

**III.B.1.** Donner les coordonnées du polynômes $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base $(H_0, H_1, H_2, H_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

**III.B.2.** En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

**III.B.3.** Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

### III.C Polynômes à valeurs entières

**III.C.1.** Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

**III.C.2.** En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $H_n$ est à valeurs entières sur les entiers.

**III.C.3.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

**III.C.4.** Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont entières.

**III.C.5.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P$ est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\,P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

## Problème hard

# Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices nxn à coefficients réels.

**Dans tout le problème, $X$ est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et $T$ un endomorphisme non nul de $X$.**

Soit$\mathcal{B}$ une base de $X$, on note $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant $T$ dans cette base. On note $N(T)$ le noyau de $T$ et $R(T)$ l'image de $T$.

On dit que $T$ est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme $P$ de $X$ idempotent, c'est-a-dire tel que $P^2 = P$. On note $I$ l'endomorphisme identité de $X$, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbb{O}_n$ la matrice nulle.

# 1- Traces et projecteurs

*Si $\mathbb{A}$ est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :*

$$\mathrm{tr}\,(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\,.$$

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\mathrm{tr}\,(\mathbb{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{BA})$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ associée à $T$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$.
   *On appelle trace de $T$, notée* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T}$, *la valeur commune des traces des matrices représentant $T$.*
   *On dit que la trace est un invariant de similitude.*
   *Soit $P$ un projecteur de $X$.*
3. Démontrer que $X = R(P) \oplus N(P)$ .
4. En déduire que $\mathrm{rg}\,P = \mathrm{tr}\,\mathrm{P}$.
   *On pose $P' = I - P$.*
5. Montrer que $R(P') = N(P)$ et que $R(P) = N(P')$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces $F$ et $G$ de $X$ est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l 'endomorphisme $S$ est une somme finie de projecteurs $P_i$ , $i \in [\![1, m]\!]$ alors $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{S}$.

# 2-Projecteurs de rang 1

*On suppose dans cette partie que le rang du projecteur $P$ est égal à 1.*

8. Démontrer qu 'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.
   *Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ une base de $X$ adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$ .*
9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant $T$ s 'écrit

$$(1) \qquad \mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix}.$$

   où $\mu$ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8 et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.
10. Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à $P'$, alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n 'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = I - P$.

# 3- Endomorphismes différents d'une homothétie

*On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme $T$ n'est pas une homothétie.*

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $x$ et $T(x)$ ne soient pas liés (c 'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
12. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & ?\text{`x} & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

   où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}$.

13. En déduire que si $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

*Soit $t_i$ avec $i = [\![1, n]\!]$ une suite de $n$ nombres réels vérifiant* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{t_i}$.

14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ a pour éléments diagonaux $t_1$ et $t_2$.

*Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur $L$ de $X$ de rang 1, tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$.*

15. En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant $T$ s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix}.$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.

16. En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les $t_i$ où $i \in [\![1, n]\!]$.

# 4 -Décomposition en somme de projecteurs

*On suppose désormais que $T$ est un endomorphisme de $X$ vérifiant* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *On pose* $\rho = \mathrm{rg}\,T$ *et* $\theta = \mathrm{tr}\,\mathrm{T}$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho$x$\rho$.

*Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.*

18. A l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}'_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}'_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{T}'_1$ admet comme termes diagonaux des entiers non nuls $t_i$ avec $i \in [\![1, \rho]\!]$ .

19. En déduire que $T$ est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

*On suppose maintenant que $T_1$ est la matrice d'une homothétie.*

20. Démontrer que là encore, $T$ est la somme d'un nombre fini de projecteurs.