Lycée Lakanal



2026 - 2027

PC

Cours – variables à densité

Programme AST1

I VARIABLE ALÉATOIRE A DENSITÉ

1. Variables aléatoires à densité ; densité de probabilité d'une variable à densité

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

- ***Définition 1 :*** **Variable aléatoire à densité**

On dit que X est une **variable aléatoire à densité**, ou **variable aléatoire absolument continue** (vac), lorsque sa fonction de répartition $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

i – F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

ii – F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

•• ***Définition 2 :*** **Densité de probabilité d'une vac**

Soit X une variable absolument continue.

On appelle **densité** (ou **densité de probabilité**) de X toute application f_X telle que :

i – f_X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;

ii – Pour tout réel x, sauf éventuellement en un nombre fini de points de $\mathbb{R}$: $f_X(x) = F_X'(x)$.

••• ***Remarque***

Ne jamais parler de **la** densité d'une vac X, mais **d'une** densité de X : il ressort en effet clairement de la définition qu'il n'y a jamais unicité.

2. Caractérisation – théorèmes d'existence

a. Caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité

Proposition *admise*

Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(1) F est continue sur $\mathbb{R}$;

(2) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

(3) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire absolument continue X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tels que F soit la fonction de répartition de X.

b. Densités de probabilité et densités de probabilité de var.

Définition : densité de probabilité

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une **densité de probabilité** lorsque :

(1) f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

(2) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Proposition *à nouveau admise*

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(1) f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

(2) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire absolument continue X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tels que f soit une densité de X.

Remarques :

1 _ Autrement dit, toute densité de probabilité est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2 _ Les réciproques des résultats énoncés en **a.** et **b.** sont immédiates.

3. Densités de probabilités d'une vac

a. Quasi – égalité des densités d'une variable aléatoire absolument continue

Comme on l'a vu, une variable absolument continue n'admet pas une unique densité. Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition

Soit X une variable absolument continue, soient f et g deux densités de X.
Alors f et g sont égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Preuve

C'est immédiat : si l'on note F_X la fonction de répartition de X, f et g sont, par définition, égales à F_X' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Les fonctions f et g sont donc égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

b. Réciproque du point précédent

Proposition

Soit X une variable absolument continue, et soit f une densité de X. Soit g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors g est une densité de X si et seulement si :

1. g est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

2. f et g sont égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Preuve

C'est, à nouveau, une conséquence directe de la définition d'une densité de probabilité d'une vac.

4. Appartenance à un domaine de $\mathbb{R}$ et univers – image

a. Expression de la probabilité d'appartenance à un intervalle

Proposition

Soit X une variable à densité. On note F_X la fonction de répartition de X, et f_X une densité de X. Alors :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = 0}$.

- - Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$:

$$\boxed{\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}(X \in [a, b]) \\ &= \mathbb{P}(X \in [a, b[) \\ &= \mathbb{P}(X \in]a, b]) \\ &= \mathbb{P}(X \in]a, b[) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}} \quad .$$

Les formules analogues restent vraies lorsque $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, à condition de remplacer $F_X(b)$ ou $F_X(a)$ par les limites correspondantes (1 en $+\infty$, 0 en $-\infty$).

Preuve

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'évènement $(X = x)$ est inclus dans l'évènement $(X \in]x - \varepsilon, x])$, on a donc $\mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{P}(X \in]x - \varepsilon, x])$. Or $(X \leq x) = (X \leq x - \varepsilon) \cup (X \in]x - \varepsilon, x])$, et cette réunion est disjointe, par conséquent $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x - \varepsilon) + \mathbb{P}(X \in]x - \varepsilon, x])$, puis :

$$\mathbb{P}(X \in]x - \varepsilon, x]) = F_X(x) - F_X(x - \varepsilon).$$

Il résulte de ce qui précède que $0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)$.

La continuité de F_X assure que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)\right) = 0$, on a donc, par encadrement et passage à la limite : $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = 0}$.

- - Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. On a

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) \quad \text{car } \mathbb{P}(X = a) = 0 \\ &= \mathbb{P}(X \in]-\infty, b]) - \mathbb{P}(X \in]-\infty, a]) \\ &= \mathbb{P}(X \in [a, b]), \end{aligned}$$

car ici encore $X \in]-\infty, b] = (X \in]-\infty, a]) \cup (X \in [a, b])$, et l'union est disjointe.

$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(X \in [a, b[) = \mathbb{P}(X \in]a, b]) = \mathbb{P}(X \in]a, b[)$

en découlent, compte – tenu du fait que $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$.

Enfin, puisque $f_X = F_X'$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, on a bien

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. … et plus généralement…

De manière générale, pour tout domaine D de $\mathbb{R}$ sur lequel la notion d'intégrale a un sens :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t}\ .$$

On admet cette généralisation d'importance CAPITALE.

c. Univers – image, densités et fonction de répartition

Soit X une variable à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On note F_X la fonction de répartition de X, et f_X une densité de X.

Soient a la borne inférieure de $X(\Omega)$, et b sa borne supérieure. Alors :

- f_X est nulle sur $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- • Pour tout $x \leq a$, $F_X(x) = 0$, et pour tout $x \geq b$, $F_X(x) = 1$.

Plus précisément :

- Etant donné un domaine D de $\mathbb{R}$, D est presque sûrement égal à $X(\Omega)$ si et seulement si f_X est non nulle sur D et nulle sur $\mathbb{R} \setminus D$, le tout à un ensemble fini de points près.
- • La fonction de répartition de X est constante sur tout intervalle inclus (à un ensemble négligeable près) dans $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$.

5. Loi d'une variable aléatoire à densité

Lorsque l'on dispose d'une densité f d'une variable aléatoire X, on peut, grâce à la formule vue ci – dessus :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t}$$

déterminer $\mathbb{P}(X \in D)$, pour tout domaine D raisonnable. Lorsqu'on le fait, une source d'innombrables erreurs est de ne pas se préoccuper de $X(\Omega)$ (correspondant, à un ensemble négligeable près, au domaine de non – nullité de f : cf. **4.c.**).

D'où la convention suivante :

Lorsque l'on demande de déterminer la loi d'une variable aléatoire à densité X, cela signifie :

- ◦ préciser $X(\Omega)$;
- ◦ ◦ donner une densité de X.

Soient maintenant deux variables aléatoires X et Y, admettant respectivement pour densités des fonctions f_X et f_Y.

Il est facile de vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i – pour tout D « domaine raisonnable » de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in D) = \mathbb{P}(Y \in D)$;

ii – f_X et f_Y sont égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Par conséquent :

On dira que les vac. X et Y suivent la même loi lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

i – X et Y admettent des densités f_X et f_Y égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

ii – X et Y admettent une densité commune.

II LOIS CONTINUES USUELLES

1. Loi uniforme sur un intervalle de longueur finie non nulle

a. Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit X une var définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, et on note $X \rightrightarrows \mathcal{U}([a, b])$, lorsque X est une variable aléatoire absolument continue, telle que :

i – $X(\Omega)$ est presque sûrement égal à $[a, b]$;

ii – X est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction $f = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$.

La fonction f est donc définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b. Vérification

- L'application f définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, continue en tout point sauf en a et en b.

•• De plus, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\mathrm{d}t = \int_a^b f(t).\mathrm{d}t$ est clairement convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}t = 1 :$$

L'application f est donc bien une densité de probabilité.

c. Fonction de répartition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et soit X une var. de loi $\mathcal{U}([a, b])$; déterminons la fonction de répartition de X.

Une densité de X est la fonction $f = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$; cette fonction étant nulle sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, on sait que pour tout $x < a$, $\mathbb{P}(X \le x) = 0$, et que pour tout $x > b$, $\mathbb{P}(X \le x) = 1$. Soit maintenant un réel x appartenant à $[a, b]$. On a :

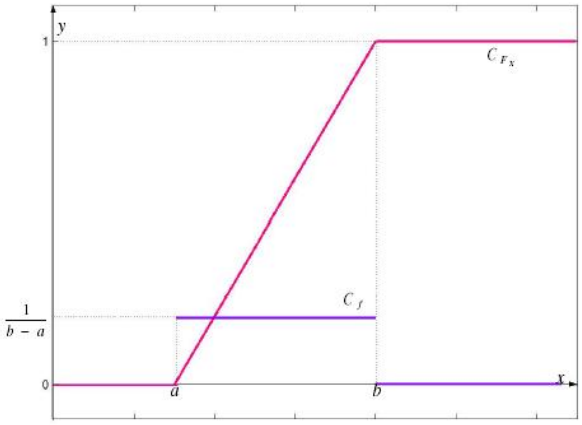
$$\mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty, a[$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^x \mathrm{d}t\,,$$

d'où : $\mathbb{P}(X \le x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.

Ainsi, la fonction de répartition de X est donnée par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \le x \le b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$.

Représentation



Allure des courbes représentatives C_{F_X} et C_f de la fonction de répartition et d'une densité d'une VAR de loi $\mathcal{U}([a,b])$.

d. Propriétés et remarques

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- Lorsque l'on dit, sans autre précision, que l'on choisit un réel " au hasard " entre a et b, il est sous – entendu que l'on modélise le nombre choisi par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[a,b]$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a,b])$. Alors :

- X est presque sûrement à valeurs dans $[a,b]$: $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$.
- Pour tout intervalle I de longueur ℓ inclus dans $[a,b]$: $\mathbb{P}(X \in I) = \dfrac{\ell}{b-a}$.
- De même que l'on a défini la loi uniforme sur $[a,b]$, on peut définir des lois uniformes sur $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$: par exemple, une var. Y suit la loi uniforme sur $]a,b[$ lorsque Y est une var. absolument continue, admettant pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{]a,b[}(x)$.

Les quatre notions coïncident, car les densités sont égales sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

- De manière générale, D étant un domaine de $\mathbb{R}$, intervalle de longueur finie non nulle ou réunion finie d'intervalles de longueurs finies et non toutes nulles, on dit qu'une var. X suit la loi uniforme sur D lorsque X est une var. à densité, presque sûrement à valeurs dans D, et admettant pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ell(D)}\mathbf{1}_D(x)$, où $\ell(D)$ désigne la longueur de D, définie comme la somme des longueurs des intervalles disjoints le composant.
- Il n'existe pas de loi uniforme sur $\mathbb{R}$, ou sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

2. Lois exponentielles

a. Définition

Soit λ un réel strictement positif, et soit X une variable aléatoire réelle.

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, et l'on note $X \rightrightarrows \mathcal{E}(\lambda)$, lorsque :

i – X est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

ii – X est une variable aléatoire absolument continue, admettant pour densité la fonction

$$f : x \mapsto \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,.$$

f est donc définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b. Vérification

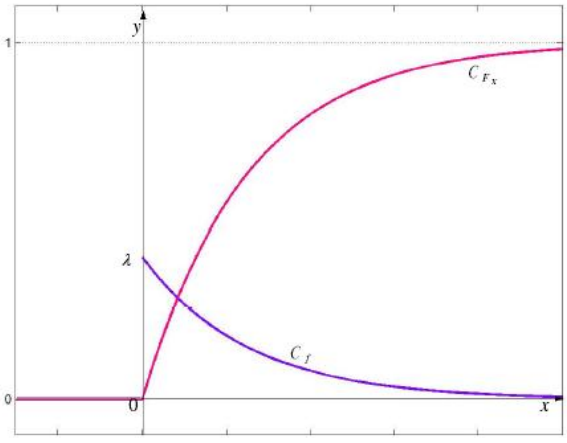
- L'application f définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, continue en tout point sauf en 0.
- • De plus, pour tout $A > 0$: $\int_{-\infty}^{A} f(t)\,dt = \int_{0}^{A} f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda A}$. On a $\lim\limits_{A \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda A}\right) = 1$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Par suite, la fonction f est bien une densité de probabilité.

c. Fonction de répartition

Soit λ un réel strictement positif, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$; déterminons la fonction de répartition F_X de X. Une densité de X est la fonction $f : x \mapsto \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$, qui est nulle sur $]-\infty, 0[$; on a donc pour tout $x < 0 : F_X(x) = 0$, et pour tout $x \geq 0 : F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda x}\,dt = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

Ainsi, la fonction de répartition de X est donnée par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.



Allure des courbes représentatives C_{F_X} et C_f de la fonction de répartition et d'une densité d'une var. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

d. Remarque

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des phénomènes chronologiques, par exemple une *durée de vie* ou un *temps d'attente* dans un processus continu.

e. Propriété d'amnésie des lois exponentielles

Les lois exponentielles sont caractérisées, parmi les lois absolument continues, par la propriété d'***amnésie***, déjà rencontrée dans le cas discret à propos des lois géométriques ; le but de l'exercice qui suit est d'établir ce fait.

Exercice 6

Soit X une var. absolument continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(X > t) > 0$.

1. On suppose que X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que pour tout $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$: $\mathbb{P}_{(X>t)}(X > t + h) = \mathbb{P}(X > h)$.

On dit alors que la loi de la var. X *possède la propriété d'amnésie, ou qu'elle est sans mémoire.*

On suppose désormais que X obéit à une loi sans mémoire, ie. que

$$\forall (t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ \mathbb{P}_{(X>t)}(X > t + h) = \mathbb{P}(X > h),$$

et l'on cherche à démontrer que X suit une loi exponentielle.

On note G_X la fonction de survie de X, définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \geq 0, \ G_X(t) = \mathbb{P}(X > t)$.

2. Montrer que G_X vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) & G_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ (2) & G_X(0) = 1 \\ (3) & \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ G_X(x+y) = G_X(x)\, G_X(y) \end{cases}.$$

3. Montrer que G_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (*on pourra utiliser la relation* (3) *, et intégrer*).

4. Montrer que G_X est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad \begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f'(x) = f'(0)\, f(x) \end{cases}.$$

5. Déterminer G_X, puis conclure.

3. Lois normales

a. Définition

Soient m un réel, σ un réel strictement positif, et soit X une variable aléatoire réelle.

On dit que X suit la loi normale de paramètres m et σ, et on note $X \rightrightarrows \mathcal{N}(m, \sigma)$, lorsque X est une variable aléatoire absolument continue, telle que :

i – l'univers – image de X est égal à $\mathbb{R}$, à un ensemble négligeable près ;

ii – X est une var. absolument continue, admettant pour densité la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

En particulier, X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de X.

La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est appelée loi normale centrée réduite, pour des raisons qui deviendront rapidement claires.

b. Vérification

L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2$: $\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B \mathrm{e}^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$. On effectue dans cette intégrale le changement de variables $x = \dfrac{t-m}{\sigma}$. On obtient : $\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Or on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge, et est égale $\sqrt{2\pi}$. On en déduit, en faisant tendre A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$ dans $\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et que

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$: la fonction f est donc bien une densité de probabilité.

c. Remarques

- Il n'est pas possible d'exprimer la fonction de répartition $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ d'une var. de loi normale à l'aide des fonctions usuelles.
- On trouve parfois la notation $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $\mathcal{N}(m, \sigma)$: on s'attachera donc à lire soigneusement l'énoncé afin de prévenir tout risque de confusion.
- Les lois gaussiennes sont d'une importance capitale, car ce sont des lois limites *par excellence* : on reviendra sur ce point dans le chapitre *convergence et approximations*, à suivre…

d. Sur la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

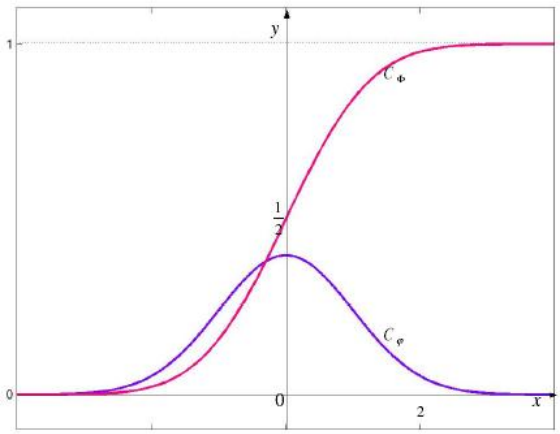
Notations

La fonction de répartition d'une var. de loi normale centrée réduite est habituellement notée Φ, et sa densité $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ se note φ.

Propriété

L'application φ est paire, et il en résulte que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Représentation



III FONCTIONS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE A DENSITÉ

1. Le problème

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit u une fonction définie sur $X(\Omega)$. On pose $Y = u(X)$. On admettra toujours, pour des raisons pratiques, que Y est une variable aléatoire (cela nous est nécessaire, puisqu'on n'a pas au programme du concours AST1 de définition des var. dans leur généralité). Moyennant quoi, se posent encore les questions suivantes :

Y est – elle une variable à densité ?

Si la réponse affirmative, quel lien y a – t – il entre les densités de Y et celles de X ?

2. Contre – exemples et exemple

- Considérons pour commencer une variable absolument continue X et l'application u constante égale à a sur $\mathbb{R}$.

  $Y = u(X)$ est alors la variable aléatoire certaine égale à a. Or une variable certaine **n'est pas** une variable à densité.

  D'où une première réponse (négative) au problème posé :

  Une fonction de variable à densité n'est pas nécessairement une variable à densité.

- • Considérons maintenant une variable aléatoire absolument continue X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est – à – dire une variable aléatoire admettant pour densité l'application f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = \lfloor x + 1 \rfloor$ ($\lfloor\ \rfloor$ signifiant ici « partie entière »).

  On démontre alors que $Y = u(X)$ est une variable aléatoire discrète, suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.

- • • Troisième et dernier contre – exemple, en exercice :

  Soit X une vac. suivant la loi normale centrée – réduite, et soit u : $x \mapsto \frac{1}{2}(|X| + X)$.

  Montrer que $Y = u(X)$ n'est ni une variable aléatoire à densité, ni une variable aléatoire discrète.

- • • • Un résultat positif pour finir (premier théorème de transfert, ou théorème de transfert pour la loi) :

> Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, soit f_X une densité de X.
>
> Soit u une application de classe C^1 sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, et telle que u' ne s'annule pas.
>
> Alors $Y = u(X)$ est une variable à densité, et une densité de Y est : $f_Y = \left(\left(\frac{f_X}{|u'|} \right) \circ u^{-1} \right) \times \mathbf{1}_{u(I)}$.

Ce théorème ne nous serait pas très utile en pratique. Il est de toutes façons hors-programme.

3. La pratique

a. Le principe

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit u une fonction définie sur $X(\Omega)$. On pose $Y = u(X)$.

La méthode pour déterminer la loi de Y est :

- de déterminer, aussi précisément que possible, l'univers – image $Y(\Omega)$.

Ensuite :

- (***Cas rare***) Si $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable, Y est une variable aléatoire discrète. Dans ce cas, on cherche à déterminer $\mathbb{P}(Y = n)$, pour tout n dans $Y(\Omega)$.
- Si $Y(\Omega)$ n'est ni fini ni dénombrable, (ce qui laisse espérer que Y sera une variable à densité) :
  - On détermine la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X.
  - On vérifie ***soigneusement*** si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.
  - Si tel est bien le cas, on peut conclure que Y est une variable à densité, et l'on obtient une densité de Y en dérivant F_Y là où c'est possible.

On est prié de faire, <u>soigneusement,</u> toutes les vérifications voulues avant de dériver sauvagement la fonction de répartition...

IV MOMENTS DE VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

1. Espérance d'une variable aléatoire à densité

a. Définition

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue.

On dit que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et dans ce cas l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la var. X est le réel défini par : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t}$.

b. Propriétés de l'espérance

Les propriétés de base de l'espérance connues pour des variables aléatoires discrètes, s'étendent au cas de var. à densité :

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires (discrètes ou à densité) à densité définies sur le même espace probabilisé, admettant une espérance. Alors :

Linéarité de l'espérance :

Pour tout réel α, la var. $\alpha X + Y$ admet une espérance, et $\boxed{\mathbb{E}(\alpha X + Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$.

Idempotence de l'espérance :

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X))$ existe, et $\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)}$.

Isotonie (« croissance ») de l'espérance :

Si $X \leq Y$ presque sûrement, *i.e.* si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\boxed{\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)}$.

Nous admettrons ces résultats, qui ne sont pas forcément des évidences (la linéarité, notamment, est une conséquence du théorème de transfert pour l'espérance d'une fonction d'un couple de var., HP en AST1)

c. Théorème de transfert

On admet également le résultat suivant :

Théorème de transfert (ou théorème de transfert pour l'espérance)

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de densité f. Soit $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

On suppose que $Y = \phi(X)$ est une variable aléatoire.

Alors Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t .$$

Remarque

L'importance de ce théorème dépasse de loin celle du théorème de transfert pour la loi, énoncé précédemment à titre d'exemple, et on le répète HP en AST1 ; lorsque l'on parle **du** théorème de transfert, il n'y a pas d'ambiguïté : c'est du théorème de transfert pour l'espérance qu'il s'agit.

2. Moments d'une var à densité

a. Définition

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, et soit f une densité de X.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

On dit que X admet un moment d'ordre r si et seulement si $\mathbb{E}(X^r)$ existe. Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est le réel $m_r(X)$ défini par $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$.

Il résulte alors du théorème de transfert que

La variable aléatoire X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et dans ce cas $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

Il est facile de démontrer que lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, sa convergence est automatiquement absolue.

Malgré cela, on est prié de montrer qu'on connaît son cours, que l'on sait que l'expression $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ provient du théorème de transfert… autrement dit, on est prié de ne pas oublier de vérifier l'hypothèse d'**absolue** convergence.

b. Exemple

Soit X une vac admettant pour densité la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ (*on vérifierait facilement que f est bien une densité de probabilité*). Montrons que X admet un moment d'ordre 1, mais ne possède pas de moment d'ordre 2.

- La fonction f étant nulle sur $]-\infty, 1[$, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$, et en cas de convergence ces deux intégrales sont égales. Or pour tout $A > 1$:

$\int_1^A x f(x)\,dx = \int_1^A \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A}$; on a donc $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A x f(x)\,dx = 2$, et ceci assure la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$, ainsi que l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 2$. La convergence est absolue puisque la fonction intégrée est à valeurs positives, donc X admet un moment d'ordre 1, et $m_1(X) = 2$.

•• Pour tout $A > 1$: $\int_1^A x^2 f(x)\,dx = \int_1^A \frac{2}{x}\,dx = 2\ln A$. On en déduit que $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A x^2 f(x)\,dx = +\infty$, et il s'ensuit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ diverge ; par conséquent, X n'admet pas de moment d'ordre 2.

c. Propriétés

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, et soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.
On suppose que X admet un moment d'ordre r.
Alors, pour tout entier $s \in \{1, ..., r\}$, X admet un moment d'ordre s.

Démonstration

Soit f une densité de X, et soit $s \in \{1, ..., r\}$. Montrer que X possède un moment d'ordre s revient à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^s f(t)\,dt$ est absolument convergente.

• On a, pour tout réel t tel que $|t| \geq 1$: $0 \leq |t|^s \leq |t|^r$, donc $0 \leq |t^s f(t)| \leq |t^r f(t)|$. Or par hypothèse, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt$ est absolument convergente, et il s'ensuit que les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} t^r f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} t^r f(t)\,dt$ sont elles aussi absolument convergentes. Des considérations précédentes, il résulte que les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} t^s f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} t^s f(t)\,dt$ sont absolument convergentes.

•• D'autre part, pour tout réel t tel que $|t| < 1$, on a $|t|^s < 1$, et donc, puisque f est à valeurs positives, $|t^s f(t)| \leq f(t)$. La fonction f étant une densité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et a fortiori $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ est convergente. On déduit de ce qui précède et du critère de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions à valeurs positives que l'intégrale $\int_{-1}^{1} t^s f(t)\,dt$ est absolument convergente.

••• Par suite, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^s f(t)\,dt$ est absolument convergente, ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 2

Soit X une variable à densité bornée. Alors X admet un moment de tout ordre.

Démonstration

Dire que X est bornée revient à dire qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $X(\Omega) \subset [-M, M]$; si tel est le cas, X admet une densité f nulle en – dehors du segment $[-M, M]$. Cette fonction f est continue sur $[-M, M]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $\forall\ t \in [-M, M]$, $|t^r f(t)| \leq M^r f(t)$.

L'intégrale $M^r \int_{-M}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t = M^r \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ; le critère de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions positives assure alors que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-M}^{M} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et que X possède un moment d'ordre r.

Remarque

Ce résultat s'étend naturellement au cas où X est presque sûrement bornée, *i.e.* au cas où il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\mathbb{P}\left(X \in [-M, M]\right) = 1$.

3. Variance et écart – type

a. Variance

Définition

Soit X une var. à densité admettant une espérance.

On dit que X possède une variance si et seulement si la variable aléatoire $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ possède une espérance, et dans ce cas on définit la variance de X, notée $\mathbb{V}(X)$, par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$.

Proposition (Formule de Huygens – Köenig)

Soit X une variable aléatoire à densité. Alors

i – X possède une variance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2 ;

ii – Lorsque X possède une variance : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

Démonstration

i – • Considérons tout d'abord une variable aléatoire T, ainsi qu'un réel a ; supposons que T admet un moment d'ordre 2. Alors T admet également un moment d'ordre 1 : les variables aléatoires T^2, aT et a admettent toutes trois une espérance, et, par linéarité, il en résulte que $\mathbb{E}\left(T^2 + 2aT + a^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(T + a\right)^2\right)$ existe. Nous avons ainsi démontré que si une variable aléatoire T admet un moment d'ordre 2, alors, pour tout réel a, la var $T + a$ admet un moment d'ordre 2.

Revenons maintenant à notre variable aléatoire X.

•• Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède également une espérance. On applique ce qui précède avec $a = -\mathbb{E}(X)$, et on en déduit que $Y = X + a$ possède un moment d'ordre 2. Ainsi, $\mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$ existe, ce qui signifie que X possède une variance.

••• Si X admet une variance, alors la var $Y = X - \mathbb{E}(X)$ existe et possède un moment d'ordre 2. On applique à nouveau ce qui précède, avec cette fois – ci $a = \mathbb{E}(X)$; on en déduit que $X = Y + a$ possède un moment d'ordre 2.

ii – On a démontré que X possède une variance ssi X possède un moment d'ordre 2. Si tel est le cas, on a de plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2,\end{aligned}$$

et ceci achève la démonstration.

Propriétés

Proposition

Soit X une var à densité admettant une variance. Alors :

i – $\mathbb{V}(X) > 0$.

ii – Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la vac $aX + b$ possède une variance, et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Démonstration

i – On sait déjà que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X) \right)^2 \right) \geq 0$, car $\left(X - \mathbb{E}(X) \right)^2$ est à valeurs positives ; il nous reste donc à vérifier que $\mathbb{V}(X) \neq 0$. Raisonnons par l'absurde : supposons $\mathbb{V}(X) = 0$. Alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \mathbb{E}(X) \right)^2 f(t) \, dt = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \left(t - \mathbb{E}(X) \right)^2 f(t)$ est à valeurs positives, on en déduit que cette fonction est nulle en tout point où elle est continue, donc sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Or $t \mapsto \left(t - \mathbb{E}(X) \right)$ ne s'annule qu'en un point ; la fonction f est donc nulle, sauf peut – être en un nombre fini de points. Par suite, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = 0$, ce qui contredit la définition d'une densité. L'hypothèse formulée est donc absurde, et il s'ensuit que $\mathbb{V}(X) > 0$.

ii – La linéarité de l'espérance assure que $\mathbb{E}(aX + b)$ existe, et que $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Nous avons donc $\left((aX + b) - \mathbb{E}(aX + b) \right)^2 = a^2 \left(X - \mathbb{E}(X) \right)^2$; on en déduit l'existence de $\mathbb{V}(aX + b)$, ainsi que l'égalité : $\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}\left((aX + b) - \mathbb{E}(aX + b) \right)^2 = a^2 \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X) \right)^2 = a^2 \mathbb{V}(X)$.

b. Ecart – type ; variables centrées réduites

Les définitions ci – dessous sont analogues à celles qui ont cours pour des variables aléatoires discrètes :

Définition 1

Soit X une variable aléatoire absolument continue possédant une variance.

On définit l'écart – type de X, noté $\sigma(X)$, par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque

Cette définition a bien un sens, car la variance de X est positive.

Définition 2

Soit X une variable aléatoire absolument continue.

- On dit que X est une variable ***centrée*** lorsque X possède une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$;
- On dit que X est une variable ***réduite*** lorsque X possède une variance et $\mathbb{V}(X) = 1$.

Proposition

Soit X une variable aléatoire absolument continue possédant une variance.

Alors la var. $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Remarques

- La variance d'une variable à densité étant non nulle, on a $\sigma(X) \neq 0$: La var. X^* est donc bien définie.

•• On dit parfois que X^* est la variable centrée réduite issue de X.

La démonstration de ce résultat est la même que pour des variables aléatoires discrètes.

4. espérance et variance des lois continues usuelles

a. Le résultat

Proposition

Soit X une variable aléatoire suivant l'une des lois continues au programme : loi uniforme sur un segment $[a, b]$, loi exponentielle de paramètre λ, ou loi normale de paramètres m et σ.

Alors X possède une espérance et une variance, et :

- Si X suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$.
- •• Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$.
- ••• Si X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \sigma^2}$.

b. Les démonstrations

- ***Loi uniforme sur un segment***

On sait que $f = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$ est une densité de X. La VAR X est bornée presque sûrement, car $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = 1$.

Par suite, X admet un moment de tout ordre. En particulier, X admet une espérance, et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ est nulle en } - \text{ dehors de } [a, b] \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b,\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$.

De même, X admet un moment d'ordre 2, et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{b-a}\int_a^b t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

On a donc :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12},$$

et l'on obtient bien comme annoncé : $\mathbb{V}(X) = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- •• **Lois exponentielles**

On rappelle que pour tout $\lambda > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge, et : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}}$.

***Moyennant quoi* :**

Considérons une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$; une densité de Y est donc la fonction $f : x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant nulle sur $\mathbb{R}^-$, le moment d'ordre r de Y est donné par $m_r(Y) = \int_0^{+\infty} \lambda\, t^r f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda\, t^r \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t$, sous réserve de convergence absolue de cette intégrale. D'après le résultat rappelé ci-dessus (et les convergences étant évidemment absolues), Y possède un moment de tout ordre, et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $m_r(Y) = \dfrac{r\,!}{\lambda^r}$.

En particulier, Y possède une espérance et une variance, et l'on a :

$\mathbb{E}(X) = m_1(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, et $\mathbb{V}(X) = m_2(X) - m_1(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

• • • Loi normales

◦ Considérons tout d'abord une var. Y suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ de densité $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, on intègre par parties dans l'intégrale $\int_A^B t^2 f(t)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B (t) \left(t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right) \mathrm{d}t$, en posant $v(t) = t$ et $u(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1, donc l'intégration par parties est licite, et donne :

$$\int_A^B t^2 f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[u(t)\, v(t) \right]_A^B - \int_A^B u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right]_A^B + \int_A^B f(t)\, \mathrm{d}t .$$

On fait alors tendre successivement A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$. On a par croissance comparée $\lim\limits_{A \to -\infty} A\, \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = \lim\limits_{B \to +\infty} B\, \mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} = 0$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut 1, car f est une densité ; ceci assure la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t$, ainsi que l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t = 1$.

La convergence étant bien sûr absolue (la fonction intégrée est positive), Y admet un moment d'ordre 2, et $m_2(Y) = 1$. On sait alors que la variable aléatoire Y admet également un moment d'ordre 1, et l'on a :

$m_1(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, \mathrm{d}t = 0$, puisque la fonction intégrée est impaire. Ainsi, Y possède une espérance et une variance, et l'on a : $\mathbb{E}(Y) = m_1(Y) = 0$, et $\mathbb{V}(Y) = m_2(Y) - m_1(Y)^2 = 1$.

◦◦ Posons maintenant $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$; on sait que Y suit la loi normale centrée réduite, et $X = \sigma Y + m$. Il en résulte que X possède une espérance et une variance, et que :

$\mathbb{E}(X) = \sigma\, \mathbb{E}(Y) + m = m$, et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2\, \mathbb{V}(Y) = \sigma^2$.