Lycée Lakanal



2026 - 2027

PC

Formulaire – variables à densité

Résultats préliminaires

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.
- Pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
- Pour tout réel $\lambda > 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$ converge et vaut $\frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Densités de probabilité

On appelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive ou nulle, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Variable aléatoire à densité

On dit que la VAR X est une variable aléatoire à densité lorsque l'une deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) La fonction de répartition de X est C^0 sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

ii) Il existe une densité de probabilité f telle que pour tout réel x : $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Densités d'une variable aléatoire à densité

Soit X une var à densité, de fonction de répartition F. Les densités de probabilité de X sont les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égales à F' sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Théorèmes d'existence

- Toute densité de probabilité est une densité d'une variable aléatoire X.
- Toute fonction F continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, croissante et telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ est la fonction de répartition d'une v.a.c.

Loi d'une fonction de variable à densité

Méthode générale

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire Y fonction d'une variable à densité X :

- On détermine, de manière aussi précise que possible, $Y(\Omega)$.
- **(rare)** Si $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable, Y est une variable aléatoire discrète ; on obtient la loi de Y en déterminant, pour tout n de $Y(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(Y = n)$.
- **(cas le plus courant)** Sinon, on exprime la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X ; si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, alors Y est une variable à

densité, et on obtient une densité de Y en dérivant F_Y là où c'est possible.

Indépendance ; formule de convolution

Deux vac X et Y, définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y, sont indépendantes ssi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{P}(X \leq x,\ Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$.

formule de convolution HP à l'Edhec, mais pourrait être donnée dans un sujet

Lorsque X et Y sont deux vac définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y, la VAR. $Z = X + Y$ est une variable aléatoire à densité, et la fonction

$$f_Z : z \mapsto (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\,\mathrm{d}t$$

une densité de Z.

Moments d'une v.a.r. à densité

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre r lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$ converge absolument. Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est le réel $m_r(X)$ défini par $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$.

Espérance

L'espérance de X est $E(X) = m_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$, sous réserve de convergence absolue.

Si X et Y sont définies sur le même espace probabilisé et possèdent une espérance :

$$\forall (\lambda,\mu)^2 \in \mathbb{R},\ E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Théorème de transfert

Soit X une VAR à densité de densité f_X, et soit une VAR $Y = \varphi(X)$, où la fonction φ est définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

La VAR Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_I \varphi(t)\, f_X(t)\, dt$ converge absolument, et dans ce cas : $E(\varphi(X)) = \int_I \varphi(t)\, f_X(t)\, dt$.

Propriété des moments de variables aléatoires

La VAR. X admet un moment d'ordre r ssi X^r admet une espérance, et dans ce cas $m_r(X) = E(X^r)$.

Si X admet un moment d'ordre r, alors pour tout $s \in [\![1, r]\!]$, X admet un moment d'ordre s.

Variance (formule de König – Huygens)

Sous réserve d'existence de $E(X^2)$: $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$

Si la v.a.r. à densité X possède une variance :

- $V(X) > 0$.
- X possède une espérance.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- l'écart – type de X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Si les VAR X et Y sont indépendantes et admettent une variance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.