Lycée Lakanal

2026 - 2027

PC

Compléments d'algèbre linéaire

0 – *Machinbidules que tout le monde il doit savoir le faire en moins de 5 minutes…*

Exercice 1

Soit $a < b$, et $F = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$, muni des opérations usuelles.

Montrer que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

Exercice 2

Soit $F = \left\{ (5x + 3y, x - 4y, 2x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\dim F$, et donner une base de F.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ si, et seulement si, $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 4

Les espaces ci – dessous sont munis de leur base canonique.

Déterminer les matrices, relativement à ces bases, des applications linéaires f suivantes :

1. $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 3y - z, x - 2y + 4z) \end{array} \right.$.

2. $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(2), P'(1), P(-1)) \end{array} \right.$.

3. $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left(P(i) - P'(j) \right) E_{i,j} \end{array} \right.$.

Exercice 5

Soit $\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (M, P) & \mapsto & \left(M_{1,1} + P(n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$. Montrer que Φ est une application linéaire.

I – Révisions d'algèbre linéaire de première année

Exercice 6

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $z = x - y$, et la droite D d'équations $x = -y = z$.

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Exercice 7

Soit $E = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n \right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie égale à 3.
2. Soit F le sous – ensemble de E constitué des suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

   Montrer que F est un sous – espace vectoriel de E.

   Quelle est sa dimension ? En donner une base.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E.

On désigne par p l'indice de nilpotence de u. Montrer que : $\dfrac{n}{n - \mathrm{rg}(u)} \leq p \leq \mathrm{rg}(u) + 1$

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $A^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \ker(A)$ et que A est semblable à $N = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$, où $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit A une matrice carrée telle que $A^{2026} = 0$.

Montrer que pour tout entier $n > 0$: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(A + A^2 + ... + A^n\right)$.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id$.

1. Montrer que n est pair.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
3. On pose $n = 2p$. Montrer qu'il existe une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de E^p telle que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_p, f(e_p))$ soit une base de E. Préciser la matrice de f dans cette base.

Exercice 12

Soient $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. On note J_r la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe deux matrices inversibles $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $J_r = Q^{-1} A P$.

hint *On pourra introduire l'application linéaire f canoniquement associée à A.*

Exercice 13

Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et O la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit alors $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $M \in \mathcal{GL}_{p+q}(\mathbb{K}) \Rightarrow \left(A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})\right)$.

hint *On écrira M^{-1} sous forme triangulaire par blocs.*

2. Montrer inversement que :

$$\left(A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})\right) \Rightarrow M \in \mathcal{GL}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

hint *On cherchera une matrice triangulaire par blocs M' telle que $M \cdot M' = I_{p+q}$.*

Exercice 14

Préliminaire

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On désigne par $f_{|\operatorname{Im} f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$:

Montrer que $\operatorname{Ker}\left(f_{|\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, et que $\operatorname{Im}\left(f_{|\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

Enoncé principal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie égale à $3n$.

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\operatorname{rg}(f) = 2n$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} O_n & O_n & O_n \\ I_n & O_n & O_n \\ O_n & I_n & O_n \end{pmatrix}$.

II – Trace ; formes linéaires

Exercice 15

1. Existe-t-il $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = I_n$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et de trace nulle. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que (u, Au) soit libre.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application linéaire $X \mapsto A X B$.

Démontrer la formule : $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A) \times \mathrm{Tr}(B)$.

Exercice 17

Dans tout cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, *et* $n \in \mathbb{N}^*$.

0. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application Φ_A définie par : $\Phi_A : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{pmatrix}$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Réciproquement, soit $\Phi \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^*$. Montrer que : $\exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \Phi = \Phi_A$.

2. Montrer que, dans tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible.

3. Déterminer toutes les formes linéaires Ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \ \Psi(MN) = \Psi(NM).$$

III – Interpolation

Exercice 18

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ trois réels distincts, et $P \in \mathbb{R}[X]$.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)(X-c)$.

On utilisera les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 19

1. On pose $H_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \dfrac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k)$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En déduire que le produit de n entiers relatifs consécutifs est divisible par $n!$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence de :

i – $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

ii – $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20

Soit $u \in \mathbb{R}$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = X(X-ku)^{k-1}$.

1. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(X) = P(0) + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(ku)}{k!} P_k(X)$.

Exercice 21

Soient $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés au n-uplet $(-1, \dots, -n)$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\alpha_{n,k} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (i - k)$.

Soient enfin $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)\dots(x+n)}$ et $g_n : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\alpha_{n,k}(x+k)}$.

1. Donner l'écriture factorisée des polynômes L_i et les valeurs de $L_i(-j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.
2. Montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner la décomposition de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.
3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} L_k$ et en déduire une relation simple liant f_n et g_n.
4. Montrer que f_n est intégrable pour $n \geq 2$.
5. Trouver une relation simple ente $\dfrac{1}{\alpha_{n,k}}$ et $\binom{n-1}{k-1}$.
6. Donner une expression de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$

Exercice 22

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $c_k(P) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-it}\mathrm{d}t$.

1. Exprimer les $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que P prend des valeurs rationnelles en $n+1$ rationnels $(q_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Montrer que $P \in \mathbb{Q}_n[X]$, autrement dit que les coefficients de P sont rationnels.

IV – Projecteurs ; sommes directes

Exercice 24

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et f_1,..., f_p des endomorphismes de E.

On suppose que $f_1 + f_2 + \dots + f_p = \mathrm{Id}$ et $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(f_i) \leq n$.

Montrer que les f_i sont des projecteurs *orthogonaux*, en ce sens que $f_1 \circ f_2 = 0$ dès que $i \neq j$.

On pourra d'abord montrer que E est somme directe des images des f_i.

Exercice 25

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f^3 = f^2 + 2f$. On pose :

$$E_1 = \operatorname{Ker} f,\ E_2 = \operatorname{Ker}\left(f + Id_E\right), \text{ et } E_3 = \operatorname{Ker}\left(f - 2\,Id_E\right).$$

1. Montrer que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E$.

Pour $(i, j, k) \in [\![1, 3]\!]^3$ distincts, soit p_i la projection sur E_i parallèlement à $E_j \oplus E_k$.

2. Exprimer f en fonction des $\left(p_i\right)_{i \in [\![1,3]\!]}$.

3. En déduire qu'il existe des suites réelles $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $\left(c_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = a_n\, p_1 + b_n\, p_2 + c_n\, p_3.$$

4. Montrer alors qu'il existe des suites $\left(\alpha_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\left(\beta_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $\left(\chi_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \alpha_n\, Id_E + \beta_n\, f + \chi_n\, f^2,$$

et déterminer ces suites.

Exercice 26

Soient E un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f^3 = Id_E$.

1. Montrer que : $\operatorname{Ker}\left(f - Id_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j\,Id_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - j^2\,Id_E\right) = E$.

2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 27

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

2. Montrer que $\operatorname{Im}\left(f^2 + id\right) \subset \operatorname{Ker}(f)$ et que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}\left(f^2 + id\right)$.

3. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f. Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(f)$:

$$\begin{array}{rccc} g : & \operatorname{Im}(f) & \to & \operatorname{Im}(f) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Montrer que $g^2 = -Id_{\operatorname{Im}(f)}$.

4. A l'aide du déterminant, montrer que $f^2 \neq -id$ et en déduire que $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$.

5. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

6. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 28

Soient F_1, F_2, F_3 trois sous – espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que la somme $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\left(F_1 + F_2\right) \cap F_3 = \{0\}$.

2. Généraliser.

Exercice 29

Soit $\left(a_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ réels **distincts**. Montrer que :

$$\exists\,!\left(\lambda_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(a_k\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On donnera si possible deux démonstrations.

Exercice 30

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B} = \left(e_1, ..., e_n\right)$ une base de E.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $F_i = \left\{u \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}\left(e_i\right)\right\}$.

1. Caractériser matriciellement les éléments de F_i.

2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 31

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, et $F_1, ..., F_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + ... + F_n = E$.

Montrer qu'il existe des sous – ev $G_1 \subset F_1$, $G_2 \subset F_2$, ..., $G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n = E$.

Exercice 32

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, $E_1, ..., E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n = E$, et F un autre sous – espace vectoriel de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1 + F_2 + ... + F_n$ est directe.

2. Comparer F et G.

Exercice 33

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, $E_1, ..., E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n = E$. Soit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}\left(E_i\right)$.

1. **Montrer** qu'il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout i, $u_i = u_{|E_i}$.

2. Montrer qu'alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u_1 \oplus \mathrm{Ker}\, u_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Ker}\, u_n$ et $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u_1 \oplus \mathrm{Im}\, u_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, u_n$.

Exercice 34

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $p_1, ..., p_n$ des projecteurs de E tels que

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$, et $p_1 + p_2 + ... + p_n = E$.

1. **Montrer** que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{rg}\, p_i = \mathrm{Tr}\, p_i$.

2. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_n$.

Exercice 35

Soit E le $\mathbb{C}$ – espace vectoriel des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. On pose

$$F_1 = \left\{ f \in E \,/\, \forall\, z \in \mathbb{C},\ f(jz) = f(z) \right\},$$

$F_2 = \{ f \in E \ / \ \forall \ z \in \mathbb{C}, \ f(jz) = j f(z) \}$, et

$F_3 = \{ f \in E \ / \ \forall \ z \in \mathbb{C}, \ f(jz) = j^2 f(z) \}$.

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$.

2. Généraliser.

Exercices non retenus dans la feuille, mais que l'on peut chercher si l'on veut

---

Exercice

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = 1$ et $\text{tr}(A) = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

Exercice

Soit $n \in N^*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim(F) = n-1$ si et seulement s'il existe $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $F = \ker(\Phi)$.

Exercice

1. Soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $U + iV \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + x_0 V \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$
2. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que M et N sont semblables sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ou $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, ou encore $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, b \neq 0$.

Exercice

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BAB = A$ et $ABA = B$.
Montrer que $A^2 = B^2$. Montrer que A et B ont le même noyau et la même image.

Exercice

Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\dim(E_1(A)) = 1$.

1. Montrer que $\ker(A^2)$ et $E_1(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\ker(A^2)$ et $E_1(A)$ sont stables par A.
3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$.