Lycée Lakanal



2026- 2027

Colles PC

Semaine 4 – 12/10/2026

Variables aléatoires

Exercice 1

Soit $n \geq 2$. On pose $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, nombre que l'on ne cherchera pas à simplifier.

On dispose dans une urne n jetons numérotés de 1 à n .

Dans un premier temps, on prélève au hasard ces n jetons, un par un et ***sans remise*** .

On note $u = \left(u_1, ..., u_n \right)$ les numéros des jetons dans l'ordre dans lequel ils ont été tirés. Pour $u = \left(u_1, ..., u_n \right)$, on dit qu'il y a ***record*** en $i \geq 2$ lorsque $u_i > \max\left(u_1, ..., u_{i-1} \right)$. On convient qu'il y a record en 1 .

Pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note p_i la probabilité qu'il y ait un record en i .

1. Montrer que : $\forall\, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = \frac{1}{i}$.

Soit S_n la VAR égale au nombre de records obtenus au cours des n tirages.

2. Calculer $\mathbb{E}\left(S_n \right)$.

Dans un second temps, on prélève, toujours au hasard, successivement, mais cette fois ***avec remise*** , un jeton dont on note le numéro u_i pour le $i^{\text{ème}}$ tirage. On dit maintenant qu'il y a ***record*** en 1 et en tout $i \geq 2$ tel que $u_i \geq \max\left(u_1, ..., u_{i-1} \right)$.

On note r la probabilité qu'il n'y ait qu'un record (en 1) , *i.e.* que $u_k < u_1$ si $k \geq 2$. On pose $r_0 = 1$. Pour $j \geq 2$, on note r_j la probabilité de l'événement :

$$A_j = \left[u_2 < u_1 \right] \cap \left[u_3 < u_1 \right] \cap ... \cap \left[u_{j+1} < u_1 \right] .$$

S'il y a au moins deux records, on note t_n la VAR égale à la durée de vie du premier record, c'est – à – dire $i - 1$ si le deuxième record est au rang i .

3.a. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $r_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^k$.

b. En déduire que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} r_k$ est convergente.

4.a. Exprimer la probabilité de l'événement $\left[t_n > k \right]$ à l'aide de r_k et de r .

b. En déduire $\mathbb{P}\left(t_n = k \right)$, et montrer que $r = 0$.

5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(T_n \right)$ de la durée de vie du premier record.

Exercice 2

Soient $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$ un espace probabilisé et $\left(A_n \right)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants, tous de même probabilité p . On note $q = 1 - p$.

On définit la suite de vards $\left(T_n \right)_{n \geq 1}$ en posant, pour tout ω de Ω :

$$\begin{cases} T_1(\omega) = \inf\left(j \geq 1 \ / \ \omega \in A_j \right) \\ T_2(\omega) = \inf\left(j > T_1(\omega) \ / \ \omega \in A_j \right) \\ \quad \vdots \\ T_{n+1}(\omega) = \inf\left(j > T_n(\omega) \ / \ \omega \in A_j \right) \end{cases} .$$

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_k, et vérifier qu'il s'agit bien

d'une variable aléatoire.

2. Pour toute suite strictement croissante d'entiers $\left(n_k \right)_{k \geq 1}$, déterminer la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}\left(T_{k+1} - T_k = n_{k+1} - n_k \ / \ T_1 = n_1, ..., T_k = n_k \right)$$

3. En déduire l'égalité

$$\mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \ / \ T_1 = n_1, ..., T_k = n_k \right) = \mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \ / \ T_k = n_k \right).$$

4. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}\left(T_1 = n_1, ..., T_k = n_k \right)$?

5. Démontrer que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, ..., T_{k+1} - T_k$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 3

Soit X et Y deux VARD définies sur un probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$, et à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $A = \left(a_{i,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la matrice carrée définie par :

$$\forall \ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \ a_{i,j} = \mathbb{P}_{[Y = j]}(X = i).$$

1. Montrer que : $\forall \ j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

2. On note Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Montrer que la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 1) \\ \mathbb{P}(X = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = n) \end{pmatrix}$ appartient à $\operatorname{Im} \Phi$.

3. On suppose X et Y indépendantes. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = 1$.

4. Inversement, on suppose que $\operatorname{rg}(A) = 1$. On note $\left(C_1, ..., C_n \right)$ les colonnes de A.

a. Montrer que les colonnes de A sont proportionnelles à la matrice C de **Q2**.

b. A l'aide de **Q1**, montrer que : $\forall \ j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ C_j = C$.

c. En déduire alors que les VAR X et Y sont indépendantes.

Exercice 4

Soit $\left(X, Y \right)$ un couple de v.a.r.d. définies sur un même espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$, telles que $X(\Omega) = \left\{ x_i, \ i \in I \right\}$ et $Y(\Omega) = \left\{ y_j, \ j \in J \right\}$, I et J étant des parties infinies de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. On suppose que la v.a.r. Y admet une espérance, et que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$.

1. Soit $i \in I$.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_i sur un espace probabilisé $\left(\Theta, \mathcal{A}, P \right)$ telle que $Y_i(\Theta) = Y(\Omega)$, et :

$$\forall \ j \in J, \ P(Y_i = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j \ / \ X = x_i).$$

b. Montrer que la v.a.r. Y_i possède une espérance.

L'espérance de Y_i est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant $(X = x_i)$, et on la note $\mathbb{E}(Y \mid X = x_i)$.

On considère une var. Z prenant les valeurs $\mathbb{E}(Y \mid X = x_i)$, pour $i \in I$, avec la probabilité $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. La var. Z est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant X, et est notée $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

2. Montrer que la v.a.r. $\mathbb{E}(Y \mid X)$ admet une espérance.

3. Prouver alors la ***formule de l'espérance totale*** : $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y \mid X) \right) = \mathbb{E}(Y)$,

ie : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{E}_{(X = x_i)}(Y).\mathbb{P}(X = x_i)$.

4. ***Application***

Une urne contient $p+1$ boules numérotées de 0 à p.

On considère l'expérience suivante :

- On choisit une boule au hasard dans l'urne, puis on l'y remet, mais on supprime toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à celui que l'on a tiré.
- On choisit ensuite une deuxième boule dans l'urne.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales respectivement au premier et au deuxième numéro tiré. Déterminer l'espérance de X_2.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ $(p \in]0,1[)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X}{Y}$.

2. Existence et valeur éventuelle de $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VAR discrètes définies sur un même probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose les VAR $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes, et identiquement distribuées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbb{E}\left(e^{x S_n}\right)$ existe. Montrer que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-ax}.\mathbb{E}\left(e^{x S_n}\right).$$

2. En déduire, pour tout réel a, une majoration de $\mathbb{P}(S_n \geq a)$, lorsque les X_k suivent une ***loi de Bernoulli centrée*** (*i.e.* à valeurs dans $\{-1, 1\}$).

Exercice 7

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit T une var. indépendante des précédentes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$, et l'on pose pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

1. Si G_T et G_X désignent les fonctions génératrices de T et de X_1, montrer que la fonction génératrice de S est donnée par : $G_S = G_T \circ G_X$.

2. ***Formule de Wald***

Si X_1 et T admettent des espérances m et t, montrer que S possède une espérance, et que $\mathbb{E}(S) = mt$.

3. Soient N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires <u>iid</u> suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, indépendantes de N.

Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$, puis celle de S_N.

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P((X=i) \cap (Y=j)) = \dfrac{c(i+j)}{i!\,j!}$.

Déterminer la loi de X, puis les valeurs de c, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_i \lambda_i$ converge. On considère une suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes avec $n_i \sim P(\lambda_i)$ (loi de Poisson).

1. Calculer $\mathrm{E}(n_i)$.
2. On note A l'événement : "tous les n_i sont nuls sauf un nombre fini". Montrer que $P(A) = 1$.
3. Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers. On considère la variable aléatoire $X(\omega) = \lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{N} p_i^{n_i(\omega)}$. Montrer que X est finie presque sûrement. Déterminer l'espérance de X et donner une condition pour qu'elle soit finie.

Exercice 10

Si X est une variable aléatoire réelle, sa fonction de répartition est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

1. Montrer que F_X est une fonction croissante, continue à droite, qui vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire discrète réelle et (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes réelles telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$. En considérant un ensemble fini I tel que $P(X \in I) > 1 - \epsilon$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{x\in X_n(\Omega)\cup X(\Omega)} |P(X_n = x) - P(X = x)| = 0.$$

3. En déduire que F_{X_n} converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F_X.

Exercice 11

On dispose de deux urnes : l'urne 1 est remplie de boules blanches, en proportion p $(0 < p < 1)$, et de boules noires, en proportion $1-p$; l'urne 2 contient 10 boules numérotées de 0 à 9. Une expérience aléatoire ω se déroule de la façon suivante : on tire avec remise des boules dans l'urne 1 jusqu'à obtenir une boule blanche, on note $N(\omega)$ le nombre de tirages nécessaires ; l'entier $N(\omega)$ étant déterminé, on tire avec remise $N(\omega)$ boules dans l'urne 2, on note $Y_i(\omega)$ $(1 \leq i \leq N(\omega))$ le numéro de la boule tirée lors du $i$ème tirage dans l'urne 2. Enfin, on note

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} \frac{Y_i(\omega)}{10^i}$$

On supposera les variables aléatoire N et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes.

1. Reconnaître la loi de N, en rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que X admet une espérance finie et la déterminer.
3. On définit l'application F_X sur $[0,1[$ par

$$\forall t \in [0,1[, F_X(t) = P(X \leq t)$$

Etudier la continuité de F_X sur $[0,1[$.

Exercice 12

Soit $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de cardinal n. On note F^F l'ensemble des fonctions de F dans F, que l'on munit de l'équiprobabilité, et on tire aléatoirement un élément $f \in F^F$. Pour tout $x_i \in F$, on désigne simplement par $f(x_i)$ la variable aléatoire $f \mapsto f(x_i)$.

1. Montrer que les variables aléatoires $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ sont indépendantes et identiquement distribuées.
2. On se fixe $u_0 \in F$, et on considère la suite de variables aléatoires définies par la relation de récurrence

$$u_{k+1} = f(u_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On définit deux variables aléatoires $Q = \min\{j \in \mathbb{N}^* : \exists i < j, u_i = u_j\}$ et $T = \min\{t \in \mathbb{N}^* : \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, u_{k+t} = u_k\}$.

Donner leur interprétation et montrer que $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{E}(Q+1))$.

3. Montrer que $\mathrm{E}(Q) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(Q \geq k)$ et en déduire une majoration de $\mathrm{E}(Q)$.

Exercice 13

Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

On note également $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite des nombres premiers (rangés dans l'ordre strictement croissant) et on définit l'ensemble C_n par :

$$C_n = \{k \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}^*, i \leq n \Rightarrow p_i \not| k\}$$

C_n est donc l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont divisibles par aucun des p_i, pour $i \leq n$.

1. Justifier que l'on peut définir une probabilité P_α sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant

$$P_\alpha(\{k\}) = \frac{1}{k^\alpha \zeta(\alpha)}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, calculer $P_\alpha(m\mathbb{N}^*)$.

2. Calculer $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_n\right)$ et en déduire l'égalité :

$$\zeta(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}$$

3. Existe-t-il une probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $P(m\mathbb{N}^*) = \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 14

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit U une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant une espérance, et $A \in \mathcal{A}$ un évènement de probabilité non nulle. Montrer que la somme $\sum_{u \in U(\Omega)} u\, \mathbb{P}_A(U = u)$ existe.

On notera désormais $\mathbb{E}_A(U)$ cette quantité.

Soient maintenant X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi, admettant une variance.

2. On suppose que $X(\Omega)$ est fini. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes si et seulement si X et Y sont quasi-constantes, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(Y = \alpha) = 1$.

3. Montrer que ce résultat reste exact si l'on suppose X et Y minorées.

4. On suppose $X + Y$ et $X - Y$ indépendantes, X et Y non quasi constantes ; on considère l'ensemble $A_X = \{x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) \neq 0\}$. Que peut-on dire de A_X ?

Exercice 15

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).

On définit la VAR N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, si N prend une valeur positive non nulle n, on réalise une seconde série de n tirages d'une boule de l'urne, toujours avec remise.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue lors de cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$.

3. Vérifier l'égalité $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4}{9}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

On pourra reconnaître une série géométrique dérivée r – ième, pour un entier r bien choisi.

4. Montrer que X possède une espérance, et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 16

Une urne contient des boules noires et des boules blanches, la proportion de boules noires étant de p, avec $0 < p < 1$. On effectue une succession de tirages d'une boule de cette urne, avec, à chaque fois, remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.

1. On note N le rang aléatoire où l'on obtient pour la première fois une boule noire, et B le rang aléatoire où l'on obtient pour la première fois une boule blanche.

a. Donner les lois, espérances et variances des variables aléatoires N et B.

b. Les variables aléatoires N et B sont – elles indépendantes ?

2. On note X la longueur de la première suite de boules de même couleur, et Y la longueur de la deuxième suite de boules de même couleur. Ainsi, l'événement $(X = 2, Y = 3)$ est réalisé si et seulement si on a tiré (n, n, b, b, b, n) ou (b, b, n, n, n, b), où n désigne le tirage d'une boule noire, et b celui d'une boule blanche.

a. Quelle est la loi du couple (X, Y) ? Quel est le signe de $\mathrm{cov}(X, Y)$?

b. Déterminer la loi de X et son espérance $\mathbb{E}(X)$.

c. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

d. Calculer la probabilité de l'événement $(X = Y)$.

e. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

f. Déterminer la loi de $X + Y$.

3. Quelle est la loi de la variable aléatoire représentant la longueur de la troisième suite de boules de même couleur ?

Exercice 17

Soit X une v.a.r. définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \,.\, \mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} \,.\, \mathbb{P}(X = i) + \frac{n(n+1)}{2}\, \mathbb{P}(X > n) .$$

2. En déduire que la v.a.r. $\frac{X(X-1)}{2}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} k \,.\, \mathbb{P}(X > k)$ converge, et que lorsque cette condition est réalisée, on a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \,.\, \mathbb{P}(X > k) .$$

3. Montrer que, toujours lorsque la condition précédente est réalisée :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) \,.\, \mathbb{P}(X > k) .$$

4. Que vaut alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de l'anti – répartition ?

Exercice 18

Une grande sphère transparente contient des boules, bien mélangées, en proportion de $\frac{1}{3}$ de blanches, et de $\frac{2}{3}$ de vertes. Un jeu consiste à faire tourner la sphère, ce qui déclenche, après quelque tours, une sortie

aléatoire de N boules ; N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \mathbb{P}(N = n)$.

On sépare ensuite les boules selon leur couleur : B représente le nombre de boules blanches, et $V = N - B$ le nombre de boules vertes.

1. Dans cette question, les boules sont grosses. N suit alors la loi uniforme sur $[\![1, 8]\!]$. Quelle est la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois plus de boules vertes que de boules blanches ?

2. On s'intéresse maintenant au cas de boules naines. Notre modèle suppose alors que N suit une loi infinie discrète : $N(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N > a) \neq 0$. On cherche si B et V sont indépendantes.

a. Montrer que :

$$\forall\, h \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(V = h) = \left(\frac{2}{3}\right)^h \frac{1}{h!} \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{n!\,\alpha_n}{(n-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-h}.$$

b. On pose

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!\,\alpha_n$.
- Pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\varphi(h) = \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-h}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi(k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$.

Montrer que B et V sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, (h, k) \in \mathbb{N}^2,\ u_{h+k} = \varphi(h)\,\psi(k).$$

c. En déduire que pour que B et V soient indépendantes, il faut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique de raison $\lambda = \frac{\psi(1)}{\psi(0)}$, et que la loi de N soit la loi de Poisson de paramètre λ.

d. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ. B et V sont-elles nécessairement indépendantes ?

Exercice 19

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Un premier joueur tire des boules sans remise jusqu'à trouver celle qui a le plus grand numéro (c'est-à-dire ici celle numérotée n), qu'il remet dans l'urne. On note X_1 le nombre de boules tirées. Puis un second joueur effectue la même expérience avec les boules restantes, et l'on on note X_2 le nombre de boules tirées.

a. Loi de X_1, espérance, variance ?

b. Déterminer, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in [\![1, n-i]\!]$ la probabilité conditionnelle : $P(X_2 = k \,|\, X_1 = i)$. En déduire la loi de X_2.

c. Calculer l'espérance de X_2 par deux méthodes différentes.

Exercice 20

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On fixe $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

On suppose de plus que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = p^2\, q^{i+j}.$$

a. Déterminer les lois de X et de Y.

b. X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Déterminer, si elles existent, l'espérance et la variance de ces deux

variables aléatoires.

d. Déterminer la loi, et, si elles existent, l'espérance et la variance de $X + Y$

e. Déterminer la loi, et, si elles existent, l'espérance et la variance de $\min(X, Y)$.

f. Déterminer la loi, et, si elle existe, l'espérance de $|X - Y|$.

Exercice 21

a. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

b. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire p boules de cette urne et on note X la variable aléatoire représentant le plus grand numéro tiré.

Calculer, pour $k \in X(\Omega)$, $P(X \leq k)$. En déduire la loi de X. Calculer l'espérance de X.

Exercice 22

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.

a. Donner la loi de (U, V).

b. En déduire les lois de U et de V.

c. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

d. (question supplémentaire indépendante des précédentes)

Exercice 23

On a n urnes numérotées de 1 à n et N boules numérotées de 1 à N, où $N = a\,n$, où a est un entier fixé non nul. On place « au hasard » et de manière indépendante chacune des N boules dans une des urnes. Soit Y_n la VAR égale au nombre d'urnes vides, et $S_n = \frac{Y_n}{n}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note enfin T_i la VAR égale à 1 si l'urne numéro i est vide, et 0 sinon.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de T_i, et préciser son espérance et sa variance.

2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 / i < j$. Calculer $\mathbb{E}(T_i T_j)$, puis $\operatorname{cov}(T_i, T_j)$.

3. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(S_n)$.

4. Calculer $\mathbb{V}(S_n)$, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(S_n)$.

5.a. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0$,

$$\left[\left| S_n - e^{-a} \right| \geq \varepsilon \right] \subset \left[\left| S_n - \mathbb{E}(S_n) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

b.* En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| S_n - e^{-a} \right| \geq \varepsilon \right) = 0$. Conclure.

Exercice 24

On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 0}$ mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.

1. Déterminer la loi de Y_i. Les variables aléatoires Y_i sont-elles indépendantes ?

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i - 2p(1-p) \right| > \varepsilon \right) = 0$.

Exercice 25

Soient $x \in]1, +\infty[$, et une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{\lambda(x)\, x^{2n}}{(2n)!}.$$

a. Exprimer $\lambda(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

b. Déterminer la fonction génératrice de X.

c. Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 26

Soit X une var. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

On suppose X bornée, *i.e.* que : $\exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, \omega \in \Omega,\ |X(\omega)| \leq \beta$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\mathbb{P}(|X| > \alpha) \geq \dfrac{\mathbb{E}(X^2) - \alpha^2}{\beta^2}$.

Questions de cours

1. **Théorèmes de continuité pour les probabilités : au choix : cas croissant, cas décroissant.**
2. **Exercice classique : premier lemme de Borel-Cantelli.**

   Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)$.

   a. Interpréter l'évènement A.

   b. Montrer que si la série $\left(\sum P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $P(A) = 0$.

3. **Exercice classique : second lemme de Borel-Cantelli.**

   Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)$.

   a. Interpréter l'évènement A.

   b. Montrer que si la série $\left(\sum P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, alors $P(A) = 1$.

4. **Exercice classique : conditionnement Poisson/binomial**

   Une tortue pond des œufs. Le nombre d'œufs est modélisé par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot avec probabilité $p \in]0, 1[$.

   - Donner la loi du nombre D de descendants.
   - Rappeler la définition de variables aléatoires indépendantes.
   - Soit E le nombre d'œufs n'ayant pas éclot. D et E sont-elles indépendantes ?

5. **Lois géométriques : définition, schéma usuel, antirépartition, espérance, variance.**
6. **Lois de Poisson : définition, espérance, variance.**
7. **Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson :**

   Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$, et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$;
   - • La suite $(n p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel λ strictement positif.

   Alors : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

8. **Théorème de stabilité des lois de Poisson.**
9. **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff**
10. **Loi faible des grands nombres**