Lycée Lakanal



Colles PC

2026 - 2027

Semaine 3
Probas, variables aléatoires

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\tau_n = \text{card}\left(\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / \; n = 2p + 3q\right\}\right)$,

où la notation $\text{card}(E)$ désigne le cardinal de l'ensemble E. On considère alors la série de fonctions $z \mapsto \sum_{n \geq 0} \tau_n z^n$.

1. Montrer que cette série de fonctions est le produit de deux séries de fonctions « simples », que l'on déterminera.

2. En déduire le calcul de τ_n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Tennis à Deuce

Deux joueurs disputent un jeu de tennis.

Le score initial est de $0-0$. Pour remporter le jeu, un joueur doit marquer au moins 4 points et avoir au moins 2 points de plus que son adversaire : si l'une de ces deux conditions n'est pas remplie, une nouvelle balle est jouée.

Le joueur X gagne chaque balle avec la probabilité p, et bien sûr la perd avec la probabilité $1-p$.

Le joueur X peut gagner le jeu avec les scores : $4-0$, $4-1$, $4-2$, $5-3$, $6-4$, $7-5$, etc.

On fait l'hypothèse, somme toute assez raisonnable, que le jeu s'arrêtera bien un jour ou l'autre par la victoire de l'un des joueurs.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : " X remporte le jeu par 4 à 0 " ;

B : " X remporte le jeu par 4 à 1 ";

C : " X remporte le jeu par 4 à 2 ";

D : " Après 6 balles, les deux joueurs sont à égalité ".

2. Soit E l'événement : " le joueur X remporte le jeu" .

Calculer la probabilité de E sachant D.

3. Calculer la probabilité de E.

Exercice 3

k est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

X raconte des blagues à Y, à raison d'une blague par jour. A chaque fois, cela fait rire Y avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Le jeu s'arrête lorsque Y rigole, k fois de suite, à une blague de X. On note $p(n)$ la probabilité que le jeu s'arrête le jour n.

1. Déterminer la probabilité $p(k)$ que X raconte des histoires drôles pendant exactement k jours.

2. En prenant en compte le jour de la première blague foireuse, établir l'égalité :

$$\forall \; n \geq k, \quad p(n+1) = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p(n-i)}{3^i}.$$

3. Dans cette question, on suppose que $k = 2$.

a. Exprimer $p(n)$ en fonction de n.

b. En déduire la probabilité que X raconte ses histoires indéfiniment.

Exercice 4

Ruine du joueur

Deux joueurs A et B jouent à un jeu quelconque. A chaque partie, celui qui perd donne un jeton au gagnant.

On se fixe $p \in]\,0,1\,[$.La probabilité que A perde une partie est $q = 1 - p$, et celle que B perde est p.

Les joueurs disposent au total d'un stock de N jetons ; le jeu s'arrête dès que l'un d'entre eux est ruiné.

On note p_k la probabilité qu'a A, en partant d'une fortune initiale de k jetons ($k \in [\![\,0, N\,]\!]$) d'être ruiné par la suite.

0. Calculer p_0 et p_N.

1. Montrer que : $\forall\, k \in [\![\,1, N-1\,]\!]$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.

2. Pour tout entier $k \in [\![\,0, N\,]\!]$, calculer p_k.

Exercice 5

On dispose de deux jeux *identiques* de $n \in \mathbb{N}^*$ cartes chacun, dont les dos sont indiscernables.

Chacun de ces jeux est composé de n figurines représentant des animaux différents.

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu, formant ainsi une paire de cartes, mise de côté. On recommence cela n fois ; on dispose alors de n paires de cartes.

1. Quelle est la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées ?

2. Soit $k \in [\![\,0, n-1\,]\!]$, et k paires d'animaux fixées arbitrairement.

Quelle est la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées ?

3. Montrer grâce que la probabilité p_n qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée est donnée par : $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 6

Etant donné un nombre positif n, on procède à n jets successifs d'une pièce de monnaie, en notant à chaque jet le côté apparent : on obtient de cette façon un résultat d'épreuve ω, formé d'une suite de symboles F ou P. On désigne par Ω_n l'ensemble des épreuves possibles. Par exemple, $\omega = (FFPP)$ appartient à Ω_4.

1. Etant donnée une partie A de Ω_n, on pose :

$\mathbb{P}_n(A) = \frac{1}{2^n}$ (cardinal de A).

Montrer que $\mathbb{P}_n$ est une mesure de probabilités sur Ω_n.

On désigne maintenant par A_n l'ensemble des épreuves ω qui ne contiennent pas trois symboles successifs F, et l'on pose :

$u_n = \mathbb{P}_n(A_n)$.

On a donc $u_1 = u_2 = 1$, et l'on convient que $u_0 = 1$.

2.a. Pour $n \geq 3$, montrer que A_n est partitionné par les ensembles :

$B_n = \{ \omega \in A_n \ / \ \omega$ commence par $P \}$

$C_n = \{ \omega \in A_n \ / \ \omega$ commence par $FP \}$

$D_n = \{ \omega \in A_n \ / \ \omega$ commence par $FFP \}$

b. En déduire la relation de récurrence :

$$u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{4} u_{n-2} + \frac{1}{8} u_{n-3} \text{ , valable pour } n \geq 3.$$

3.a. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note f sa somme.

b. Montrer, à l'aide du **2.b.**, que $f(z) = \dfrac{8 + 4z + 2z^2}{8 - 4z - 2z^2 - z^3}$.

Exercice 7

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12. Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère. A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12, il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros choisis. Un joueur, possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{\text{ème}}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{\text{ème}}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3, et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie ».

a. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{12} p_n + \dfrac{1}{6}$.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{\text{ème}}$ partie ».

a. A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. calculer $\mathbb{P}(B_k)$.

c. En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. n joueurs $J_1, J_2, ..., J_n$ jouent l'un après l'autre dans l'ordre de leurs indices.

A chaque joueur J_k est imparti un événement A_k dont la probabilité

de réalisation est un réel $p_k \in]0,1[$. On notera $q_k = 1 - p_k$, et l'on pose $q_0 = 1$. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti. Lorsqu' aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour, puis si de nouveau aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour, *and so on*,…

On note G_k l'événement « le joueur J_k gagne », et l'on suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués.

0. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A quels coups le joueur J_k est – il susceptible de jouer ?

1. Déterminer la probabilité de G_k en fonction des réels $\left(q_j\right)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

2. Montrer que le jeu se termine presque sûrement après un nombre fini de coups.

3. Le jeu est dit ***équitable*** lorsque chaque joueur a la même probabilité de gagner. Déterminer une CNS sur les réels $\left(p_k\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ pour que le jeu soit équitable.

On suppose dans toute la suite que le jeu est équitable.

4.a. Montrer que $p_1 \leq \frac{1}{n}$.

b. On suppose que $p_1 = \frac{1}{n}$. Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, déterminer p_k.

5. Soit X la VAR égale au nombre de coups joués jusqu'à la fin du jeu. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 9

Soit $n \geq 2$. On pose $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, nombre que l'on ne cherchera pas à simplifier. On dispose dans une urne n jetons numérotés de 1 à n.

Dans un premier temps, on prélève au hasard ces n jetons, un par un et ***sans remise***. On note $u = \left(u_1, ..., u_n\right)$ les numéros des jetons dans l'ordre dans lequel ils ont été tirés. Pour $u = \left(u_1, ..., u_n\right)$, on dit qu'il y a ***record*** en $i \geq 2$ lorsque $u_i > \max\left(u_1, ..., u_{i-1}\right)$. On convient qu'il y a record en 1. Pour $i \in [1, n]$, on note p_i la probabilité qu'il y ait un record en i.

1. Montrer que : $\forall\, i \in [1, n]$, $p_i = \frac{1}{i}$.

Soit S_n la VAR égale au nombre de records obtenus au cours des n tirages.

2. Calculer $\mathbb{E}\left(S_n\right)$.

Dans un second temps, on prélève, toujours au hasard, successivement, mais cette fois ***avec remise***, un jeton dont on note le numéro u_i pour le $i^{\text{ème}}$ tirage. On dit maintenant qu'il y a ***record*** en 1 et en tout $i \geq 2$ tel que $u_i \geq \max\left(u_1, ..., u_{i-1}\right)$. On note r la probabilité qu'il n'y ait qu'un record (en 1), *i.e.* que $u_k < u_1$ si $k \geq 2$. On pose $r_0 = 1$. Pour $j \geq 2$, on note r_j la probabilité de l'événement :

$$A_j = \left[u_2 < u_1\right] \cap \left[u_3 < u_1\right] \cap ... \cap \left[u_{j+1} < u_1\right].$$

S'il y a au moins deux records, on note t_n la VAR égale à la durée de vie du premier record, c'est-à-dire $i - 1$ si le deuxième record est au rang i.

3.a. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $r_k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^k$.

b. En déduire que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} r_k$ est convergente.

4.a. Exprimer la probabilité de l'événement $\left[t_n > k \right]$ à l'aide de r_k et de r.

b. En déduire $\mathbb{P}\left(t_n = k \right)$, et montrer que $r = 0$.

5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(T_n \right)$ de la durée de vie du premier record.

Exercice 10

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < \frac{2}{3}$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille donnée ait exactement n enfants, $n \geq 1$, est égale à $\frac{1}{2} p^n$. En outre, pour chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est 1/2.

1. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

On considère une famille de n enfants.

Calculer la probabilité pour que cette famille ait k garçons.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité qu'une famille ait k garçons.

Exercice 11

Soient x, y, n trois entiers tels que $1 \leq x, y < n$. Deux joueurs E et F jouent à un jeu obéissant aux règles suivantes :

Premier tour :

- Le joueur E tire l'un après l'autre, avec remise, deux tickets dans une urne contenant n tickets parmi lesquels x tickets sont gagnants. Si les deux tickets tirés sont gagnants, E remporte la partie.
- Si E n'a pas gagné, F tire avec remise deux tickets dans une urne contenant n tickets dont y sont gagnants, et, si ces deux tickets sont gagnants, F remporte la partie.
- S'il n'y a pas de gagnant à l'issue de ce premier tour, les deux joueurs entament un second tour suivant les mêmes règles :

E tire à nouveau deux tickets d'une urne contenant n tickets dont x sont gagnants... et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux joueurs gagne.

1. Déterminer la probabilité q qu'aucun des deux joueurs ne remporte la partie au premier tour.

2. Déterminer les probabilités que E remporte la partie, que F remporte la partie, que le jeu ne se termine jamais.

3. On appelle triplet pythagoricien tout triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls tel que : $a^2 + b^2 = c^2$.

Le jeu est dit équitable lorsque E et F ont la même probabilité de remporter la partie. Montrer que le jeu est équitable si et seulement s'il existe un triplet pythagoricien (a, b, c) tel que : $x = ab$, $y = bc$ et $n = ca$.

Exercice 12

Soit $n \geq 2$. On pose $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, nombre que l'on ne cherchera pas à simplifier. On dispose dans une urne n jetons numérotés de 1 à n.

Dans un premier temps, on prélève au hasard ces n jetons, un par un et ***sans remise***. On note $u = \left(u_1, ..., u_n \right)$ les numéros des jetons dans l'ordre dans lequel ils ont été tirés. Pour $u = \left(u_1, ..., u_n \right)$, on dit qu'il y a ***record*** en $i \geq 2$ lorsque $u_i > \max\left(u_1, ..., u_{i-1} \right)$. On convient qu'il y a record en 1. Pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note p_i la probabilité qu'il y ait un record en i.

1. Montrer que : $\forall\, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = \frac{1}{i}$.

Soit S_n la VAR égale au nombre de records obtenus au cours des n tirages.

2. Calculer $\mathbb{E}\left(S_n\right)$.

Dans un second temps, on prélève, toujours au hasard, successivement, mais cette fois ***avec remise***, un jeton dont on note le numéro u_i pour le $i^{\text{ème}}$ tirage. On dit maintenant qu'il y a ***record*** en 1 et en tout $i \geq 2$ tel que $u_i \geq \max\left(u_1, ..., u_{i-1}\right)$.

On note r la probabilité qu'il n'y ait qu'un record (en 1), *i.e.* que $u_k < u_1$ si $k \geq 2$.

On pose $r_0 = 1$. Pour $j \geq 2$, on note r_j la probabilité de l'événement :

$$A_j = \left[u_2 < u_1\right] \cap \left[u_3 < u_1\right] \cap ... \cap \left[u_{j+1} < u_1\right].$$

S'il y a au moins deux records, on note t_n la VAR égale à la durée de vie du premier record, c'est – à – dire $i-1$ si le deuxième record est au rang i.

3.a. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $r_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^k$.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} r_k$ est convergente.

4.a. Exprimer la probabilité de l'événement $\left[t_n > k\right]$ à l'aide de r_k et de r.

b. En déduire $\mathbb{P}\left(t_n = k\right)$, et montrer que $r = 0$.

5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(T_n\right)$ de la durée de vie du premier record.

Exercice 13

Soit $\left(X, Y\right)$ un couple de v.a.r.d. définies sur un même espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$, telles que $X\left(\Omega\right) = \left\{x_i, i \in I\right\}$ et $Y\left(\Omega\right) = \left\{y_j, j \in J\right\}$, I et J étant des parties infinies de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. On suppose que la v.a.r. Y admet une espérance, et que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}\left(X = x_i\right) \neq 0$.

1. Soit $i \in I$.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_i sur un espace probabilisé $\left(\Theta, \mathcal{A}, P\right)$ telle que $Y_i\left(\Theta\right) = Y\left(\Omega\right)$, et :

$$\forall\ j \in J,\ P\left(Y_i = y_j\right) = \mathbb{P}\left(Y = y_j \ / \ X = x_i\right).$$

b. Montrer que la v.a.r. Y_i possède une espérance.

L'espérance de Y_i est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant $\left(X = x_i\right)$, et on la note $\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right)$.

On considère une var. Z prenant les valeurs $\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right)$, pour $i \in I$, avec la probabilité $p_i = \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$. La var. Z est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant X, et est notée $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)$.

2. Montrer que la v.a.r. $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)$ admet une espérance.

3. Prouver alors la ***formule de l'espérance totale*** : $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)\right) = \mathbb{E}\left(Y\right)$,

ie : $\mathbb{E}\left(Y\right) = \displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{E}_{\left(X = x_i\right)}\left(Y\right).\mathbb{P}\left(X = x_i\right)$.

4. ***Application***

Une urne contient $p+1$ boules numérotées de 0 à p.

On considère l'expérience suivante :

- On choisit une boule au hasard dans l'urne, puis on l'y remet, mais on supprime toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à celui que l'on a tiré.
- On choisit ensuite une deuxième boule dans l'urne.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales respectivement au premier et au deuxième numéro tiré. Déterminer l'espérance de X_2.

Exercice 14

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ $(p \in]0,1[)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \dfrac{X}{Y}$.

2. Existence et valeur éventuelle de $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 15

Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_i \lambda_i$ converge. On considère une suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes avec $n_i \sim P(\lambda_i)$ (loi de Poisson).

1. Calculer $\mathrm{E}(n_i)$.
2. On note A l'événement : "tous les n_i sont nuls sauf un nombre fini". Montrer que $P(A) = 1$.
3. Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers. On considère la variable aléatoire $X(\omega) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} p_i^{n_i(\omega)}$. Montrer que X est finie presque sûrement. Déterminer l'espérance de X et donner une condition pour qu'elle soit finie.

Exercice 16

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).

On définit la VAR N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, si N prend une valeur positive non nulle n, on réalise une seconde série de n tirages d'une boule de l'urne, toujours avec remise.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue lors de cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$.

3. Vérifier l'égalité $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

On pourra reconnaître une série géométrique dérivée r – ième, pour un entier r bien choisi.

4. Montrer que X possède une espérance, et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 17

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y lorsque : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.

1. Montrer que si $X \leq Y$, alors X est stochastiquement inférieure à Y.

Vérifier que la réciproque est fausse, en choisissant deux variables aléatoires de Bernoulli pour contre-exemple.

2. Soient X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, Y $\mathcal{P}(\mu)$ et Z $\mathcal{P}(\mu - \lambda)$, où $0 < \lambda < \mu$, telles que X et Z sont indépendantes.

Déterminer la loi de $X + Z$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

3. Soient X de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et de loi $\mathcal{B}(n, q)$, avec $p \leq q$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

On pourra noter $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi $\mathcal{B}(p)$.

et $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Y_i, suit la loi $\mathcal{B}(p)$, puis raisonner par récurrence.

Exercice 18

Une grande sphère transparente contient des boules, bien mélangées, en proportion de $\frac{1}{3}$ de blanches, et de $\frac{2}{3}$ de vertes. Un jeu consiste à faire tourner la sphère, ce qui déclenche, après quelque tours, une sortie aléatoire de N boules ; N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \mathbb{P}(N = n)$.

On sépare ensuite les boules selon leur couleur : B représente le nombre de boules blanches, et $V = N - B$ le nombre de boules vertes.

1. Dans cette question, les boules sont grosses. N suit alors la loi uniforme sur $[\![1, 8]\!]$. Quelle est la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois plus de boules vertes que de boules blanches ?

2. On s'intéresse maintenant au cas de boules naines. Notre modèle suppose alors que N suit une loi infinie discrète :

$N(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N > a) \neq 0$. On cherche si B et V sont indépendantes.

a. Montrer que :

$$\forall\, h \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(V = h) = \left(\frac{2}{3}\right)^h \frac{1}{h!} \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{n!\,\alpha_n}{(n-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-h}.$$

b. On pose

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!\,\alpha_n$.
- Pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\varphi(h) = \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-h}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi(k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$.

Montrer que B et V sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, (h, k) \in \mathbb{N}^2,\ u_{h+k} = \varphi(h)\,\psi(k).$$

c. En déduire que pour que B et V soient indépendantes, il faut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique de raison $\lambda = \frac{\psi(1)}{\psi(0)}$, et que la loi de N soit la loi de Poisson de paramètre λ.

d. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ. B et V sont-elles nécessairement indépendantes ?

Exercice 19

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Un premier joueur tire des boules sans remise jusqu'à trouver celle qui a le plus grand numéro (c'est-à-dire ici celle numérotée n), qu'il remet dans l'urne. On note X_1 le nombre de boules tirées. Puis un second joueur effectue la même expérience avec les boules restantes, et l'on on note X_2 le nombre de boules tirées.

a. Loi de X_1, espérance, variance ?

b. Déterminer, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in [\![1, n-i]\!]$ la probabilité conditionnelle : $P(X_2 = k \mid X_1 = i)$. En déduire la loi de X_2.

c. Calculer l'espérance de X_2 par deux méthodes différentes.

Exercice 20

a. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

b. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire p boules de cette urne et on note X la variable aléatoire représentant le plus grand numéro tiré.

Calculer, pour $k \in X(\Omega)$, $P(X \leq k)$. En déduire la loi de X. Calculer l'espérance de X.

Exercice 21

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.

a. Donner la loi de (U, V).

b. En déduire les lois de U et de V.

c. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

d. (question supplémentaire indépendante des précédentes)

Questions de cours et exercices classiques

1. **Théorèmes de continuité pour les probabilités : au choix : cas croissant, cas décroissant.**
2. **Les formules reines des probabilités.**
3. **Exercice classique : premier lemme de Borel-Cantelli.**

   Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)$.

   a. Interpréter l'évènement A.

   b. Montrer que si la série $\left(\sum P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $P(A) = 0$.

4. **Exercice classique : second lemme de Borel-Cantelli.**

   Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On note $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)$.

   a. Interpréter l'évènement A.

   b. Montrer que si la série $\left(\sum P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, alors $P(A) = 1$.

5. **Exercice classique : conditionnement Poisson/binomial**

   Une tortue pond des œufs. Le nombre d'œufs est modélisé par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot avec probabilité $p \in]0, 1[$.

   - Donner la loi du nombre D de descendants.
   - Rappeler la définition de variables aléatoires indépendantes.
   - Soit E le nombre d'œufs n'ayant pas éclot. D et E sont-elles indépendantes ?

6. **Lois géométriques : définition, schéma usuel, antirépartition, espérance.**
7. **Lois de Poisson : définition, espérance.**
8. **Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson :**

   Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$, et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$;
   - • La suite $(n p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel λ strictement positif.

   Alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

9. **Théorème de stabilité des lois de Poisson.**