Lycée Lakanal



2022 - 2023

PC

DM N°1

Corrigé

Exercice

Endomorphismes cycliques

Partie I *Etude d'un exemple*

1. La première colonne de A indique que $f\left(e_1\right) = e_1 + e_2 - 2e_3$; on a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $f^2\left(e_1\right) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$. Il en résulte que la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{B}' = \left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right)\right)$ dans la base $\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible (par exemple parce que $\det P = -2$), on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

La formule de changement de base assure que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est : $B = P^{-1} A P$, et l'on pourrait faire le calcul, mais il y a plus rapide : en effet, en notant $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right)\right) = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)$, on a $f\left(\varepsilon_1\right) = \varepsilon_2$ et $f\left(\varepsilon_2\right) = \varepsilon_3$, ce qui montre déjà que B est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}$. Pour déterminer la troisième colonne de B, il faut exprimer $f\left(\varepsilon_3\right)$ dans la base $\mathcal{B}' = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)$.

On a $\varepsilon_3 = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$ et $A\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f\left(\varepsilon_3\right) = -e_1 + e_2$, puis en bidouillant un peu : $f\left(\varepsilon_3\right) = -e_1 - \left(e_1 + e_2 - 2e_3\right) - \left(-e_1 - 2e_2 + 2e_3\right) = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

On en déduit que $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. D'après la question précédente, $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right), f^3\left(e_1\right)\right)$ est génératrice de E (car $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right)\right)$ l'est). De plus, $f^3\left(e_1\right) = f\left(\varepsilon_3\right) = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Or $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ceci montre que $f\left(f^3\left(e_1\right)\right) = e_1$, soit $f^4\left(e_1\right) = e_1$, achevant ainsi de prouver que f est cyclique d'ordre 4, et que $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right), f^3\left(e_1\right)\right)$ est un 4 – cycle de f.

3. On a $f^4\left(e_1\right) = e_1$, et il en découle immédiatement que $f^4\left(f\left(e_1\right)\right) = f\left(f^4\left(e_1\right)\right) = f\left(e_1\right)$, de même $f^4\left(f^2\left(e_1\right)\right) = f^2\left(f^4\left(e_1\right)\right) = f^2\left(e_1\right)$. Les applications linéaires f^4 et Id_E coïncident sur la base $\left(e_1, f\left(e_1\right), f^2\left(e_1\right)\right)$ de E donc $f^4 = Id_E$.

4. Une question de diagonalisation, à laquelle on peut répondre sans connaissances du côté du chapitre Réduction :
ce qui suit ne s'en sert pas, ceci dit toute réponse (correcte) l'utilisant sera acceptée.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ revient à prouver qu'il existe une base $\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)$ de E telle que $\begin{cases} f\left(\varepsilon_1\right) = -\varepsilon_1 \\ f\left(\varepsilon_2\right) = i\,\varepsilon_1 \\ f\left(\varepsilon_3\right) = -i\,\varepsilon_1 \end{cases}$.

Soit $\varepsilon = x\,e_1 + y\,f\left(e_1\right) + z\,f^2\left(e_1\right)$ un vecteur de E.

Détermination de ε_1

On a $f\left(\varepsilon\right) = -\varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$.

Par exemple, le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + f^2\left(e_1\right)$ vérifie $f\left(\varepsilon_1\right) = -\varepsilon_1$.

Détermination de ε_2

De même, $f\left(\varepsilon\right) = i\,\varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\,x - z = 0 \\ x - i\,y - z = 0 \\ y - \left(1 + i\right)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i\,x \\ x - i\,y - z = 0 \\ y = \left(1 + i\right)z \end{cases}$.

Par substitutions dans la troisième puis dans la deuxième ligne :

$f\left(\varepsilon\right) = i\,\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i\,x \\ x - i\,y - z = 0 \\ y = \left(1 - i\right)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i\,x \\ 0 = 0 \\ y = \left(1 - i\right)x \end{cases}$. Par exemple, le vecteur

$\varepsilon_2 = e_1 + (1-i)e_1 - i f^2(e_1)$ vérifie $f(\varepsilon_2) = i\varepsilon_2$.

Détermination de ε_3

Il suffit de conjuguer : le vecteur $\varepsilon_3 = e_1 + (1+i)e_1 + i f^2(e_1)$ vérifie $f(\varepsilon_3) = i\varepsilon_3$

Vérification du fait que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ***est une base de E :***

La matrice des coordonnées de la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est :

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$, qui a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1+i \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$ $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$, puis que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1+i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$. Cette dernière matrice, triangulaire à coefficients tous non nuls,

est inversible, donc Q l'est aussi, et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

Par construction, la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

Partie II *Cas général*

1. La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E, donc son cardinal est supérieur ou égal à la dimension de cet espace : $p \geq n$.

2. On a $f^p(x_0) = x_0$, donc pour tout $k \in \{0, ..., p-1\}$: $f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$.

Les applications linéaires f^p et Id_E sont égales en tout vecteur de la famille

$(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$C Cette famille étant génératrice de E, on en conclut que $f^p = Id_E$.

Ainsi, $f \circ f^{p-1} = Id_E$. Il en résulte que f est un automorphisme de E, et que $f^{-1} = f^{p-1}$.

3.a. C'est idiot : par définition d'un plus grand élément, $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est libre, et

$(x_0, f(x_0), ..., f^m(x_0))$. Donc $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs

$x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$.

3.b. Notons $\mathcal{H}(k)$ cette hypothèse de récurrence. D'après **a.**, $\mathcal{H}(m)$ est vérifie. Soit $k \geq m$ fixé, supposons $\mathcal{H}(k)$. Alors, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$. En composant par f, on en déduit que $f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0), f^m(x_0)$. Mais $f^m(x_0)$ est lui-même combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$, au final $f^{k+1}(x_0)$ est donc combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$, ce qui achève la récurrence.

3.c. Par hypothèse, $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\right)$ est génératrice de E. D'après **b.**, $\text{Vect}\left(\left(f^k(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N}}\right) = \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)\right)$. Donc, $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)\right)$ est génératrice de E. Cette famille est de plus libre, c'est ainsi une base de E, et l'égalité $m = n$ en découle.

4. L'existence et l'unicité de $a_0, ..., a_{n-1}$ est assurée du fait que $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

$$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) .$$

4.a. • Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g\left(f^k(x_0)\right) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j\right)\left(f^k(x_0)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x_0)$$
$$= f^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0)\right) = f^k\left(f^n(x_0)\right) = f^{n+k}(x_0) .$$

•• Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g\left(f^k(x_0)\right) = f^n\left(f^k(x_0)\right)$. Les applications linéaires g et f^n coïncident sur la base $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ de E, elles sont donc égales : $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

4.b. Pour tout $k < n-1$, l'image par f de $f^k(x_0)$ est le vecteur suivant de la base $\left(x_0, ..., f^{n-1}(x_0)\right)$.

L'image par f de $f^{n-1}(x_0)$ est $f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$.

Par conséquent, la matrice de f dans la base $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ est la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Les esprits cultivés auront reconnu une matrice compagnon.

4.c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La matrice $C - \lambda I_n$ est de rang au moins $n-1$ (ses $n-1$ premières colonnes forment une famille échelonnée). On en déduit que $\operatorname{rg}\left(f - \lambda Id_E\right) \geq n-1$, et le théorème du rang entraîne alors que $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f - \lambda Id_E\right)\right) \leq 1$.

5.a. Supposons que $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda Id_E\right) \neq \{0\}$. Alors il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
On a $f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$… par une récurrence évidente, $f^n(x) = \lambda^n x$. Comme f est cyclique d'ordre n, $f^n = Id_E$, on a donc $x = \lambda^n x$, et, x étant non nul, on en déduit $\lambda^n = 1$.

5.b. Oui, ben c'est déjà fait, ça (cf. **4.b.**) La seule différence est qu'ici, puisque f est cyclique d'ordre n, $f^n(x_0) = x_0$ (car $f^n = Id_E$), d'où : $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.c. On pose $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow C\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n-1} = \lambda x_0 \\ x_0 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_{n-3} = \lambda x_{n-2} \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$, d'où par substitutions successives,

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n-1} = \lambda^n x_{n-1} \\ x_0 = \lambda^{n-1} x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-3} = \lambda^2 x_{n-1} \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$. Si $\lambda = \lambda_r = \mathrm{e}^{\frac{2ri\pi}{n}}$, $0 \leq r \leq n-1$, ce système admet pour

solution non nulle le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \lambda_r^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_r^2 \\ \lambda_r \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc, $y_r = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_r^{n-1-k} f^k(x)$ vérifie

$f(y_r) = \lambda_r y_r$.

La famille $(y_0, ..., y_{n-1})$ est une base, car sa matrice des coordonnées dans la base

$(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est $\begin{pmatrix} \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est inversible (c'est une

matrice de Vandermonde à peu de choses près…).

La matrice de f dans la base est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$, et c'est gagné.

Problème version hard

1-Traces et projecteurs

Cette partie est essentiellement constituée de questions de cours classiques.

1. $\text{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}a_{i,j} = \text{tr}(\mathbb{BA})$
2. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de X. Soient Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.. On a alors :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}Q$$

En appliquant la question précédente avec $\mathbb{A} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ et $\mathbb{B} = Q$, on obtient :

$$\boxed{\text{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}) = \text{tr}(\mathrm{QQ}^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \text{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}).}$$

3. Pour tout x, $P(x - P(x)) = 0$ puisque $P^2 = P$ ce qui prouve que $x - P(x) \in N(P)$. Comme $P(x)$ est élément de $R(P)$, on vient de vérifier que $X = R(P) + N(P)$.
De plus par le théorème du rang :

$$\dim X = \dim(R(P)) + \dim(N(P))$$

La dimension de la somme des deux sous-espaces étant la somme des dimensions des sous-espaces, cette somme est directe. Donc :

$$\boxed{X = R(P) \oplus N(P)}$$

4. Soit x appartenant à $R(P)$. Il existe y tel que $x = P(y)$ aussi

$$P(x) = P(P(y)) = P^2(y) = P(y) = x.$$

Soit r le rang de P. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition précédente :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{tr\,P = r = tr\,(\mathbb{P}_{\mathcal{B}}) = r = rg\,P}}$$

5. On a vu précédemment que si $x \in R(P)$,$P(x) = x$ donc $P'(x) = 0$ aussi $R(P) \subset N(P')$. Réciproquement, si x est élément de $N(P')$, $P(x) = x$ donc $x \in R(P)$. Aussi

$$\boxed{R(P) = N(P')}$$

On vérifie que P' est aussi un projecteur : comme P et I commutent,

$$P'^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$$

En échangeant les rôles de P et de P' (puisque $P = I - P'$), on obtient

$$\boxed{R(P') = N(P)}$$

6. L'application de Φ : $\begin{array}{ccc} F \times G & \mapsto & X \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ est une application linéaire dont l'image est $F + G$. Aussi par le théorème du rang

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim(F \times G) - \dim(\mathrm{Ker}\,(\Phi)) \leq \dim(F \times G) = \dim F + \dim G}$$

Remarque : on peut aussi exhiber une base génératrice de $F+G$ par concaténation d'une base de F et d'une base de G.

7. Pour ne pas généraliser sans démonstration le résultat précédent à la somme de p sous-espaces (ce qui est dans le cours!!), on procède par récurrence sur le nombre de projecteurs m intervenant dans la somme.
Pour $m = 1$, $S = P_1$ donc $\mathrm{tr\,S = rg\,S}$ aussi $\mathrm{tr\,S} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr\,S} \geq \mathrm{rg\,S}$.
Supposons la propriété vraie à l'ordre $m - 1 \geq 1$. On pose $S' = \sum_{i=1}^{m-1} P_i$ donc $S = S' + P_m$. Par hypothèse de récurrence $\mathrm{tr\,S'} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr\,S'} \geq \mathrm{rg\,S'}$. La trace étant linéaire, $\mathrm{tr\,S = tr\,S' + tr\,P_m} \in \mathrm{N}$ comme somme de deux entiers. De plus, pour tout x de X : $S(x) = S'(x) + P_m(x)$ donc $R(S) \subset R(S') + R(P_m)$. En utilisant la question précédente et $\mathrm{tr\,(P_m) = rg\,(P_m)}$:

$$\mathrm{rg\,(}S\mathrm{)} = \dim R(S) \leq \mathrm{rg\,(}S'\mathrm{)} + \mathrm{rg\,(}P_m\mathrm{)} \leq \mathrm{tr\,(S')} + \mathrm{tr\,(P_m)} = \mathrm{tr\,(S)}$$

On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier naturel m :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{m} P_i \Longrightarrow \mathrm{tr\,S} \in \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{tr\,S} \geq \mathrm{rg\,S}}$$

2-Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Soit f_1 un élément non nul de $R(P)$: c'est donc une base de $R(P)$ puisque $\mathrm{rg}\,P = 1$. Comme $P \circ T(f_1) = P\,(T \circ f_1)$, cet élément appartient à $R(P)$. Aussi :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, P \circ T(f_1) = \mu f_1$$

Or pour tout x de X, $P(x)$ est colinéaire à f_1 ($P(x) = \alpha f_1$) donc

$$P \circ T \circ P(x) = P \circ T(\alpha f_1) = \mu\alpha f_1 = \mu P(x)$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{P \circ T \circ P = \mu P.}$$

9. Comme f_1 est dans $R(P)$, d'après ce qui précède, $P(f_1) = \mu f_1$. Comme $f_1 - P(f_1)$ est élément de $N(P) = \text{Vect}(f_2, \cdots, f_n)$, cela justifie la forme de la première colonne de $\mathbb{T}_\mathcal{C}$, les autres colonnes étant quelconques.

10. Par définition de P', $\mathbb{P}'_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}$. Si on écrit de la même façon, $\mathbb{T}_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix}$, un calcul en blocs donne alors :

$$\mathbb{P}'_\mathcal{C}\mathbb{T}_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbb{P}'_\mathcal{C}\mathbb{T}_\mathcal{C}\mathbb{P}'_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{B} \end{pmatrix}$$

Aussi

$$P' \circ T \circ P' = \alpha P' \Longleftrightarrow \mathbb{P}'_\mathcal{C}\mathbb{T}_\mathcal{C}\mathbb{P}'_\mathcal{C} = \alpha\mathbb{P}'_\mathcal{C} \Longleftrightarrow \mathbb{B} = \alpha\mathbb{I}_{n-1}.$$

On a ainsi vérifié par contraposition que :

$\mathbb{B}$ n 'est pas la matrice d'une homothétie si et seulement si $P' \circ T \circ P'$ n'est pas proportionnel à P'

Remarque : il suffisait d'une implication donc de montrer que si $\mathbb{B} = \alpha\mathbb{I}_{n-1}$ alors $P' \circ T \circ P' = \alpha P'$.

3- Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. Prouvons le résultat demandé par contraposition.On suppose que pour tout x, $(x, T(x))$ est une famille liée ce qui équivaut à dire que pour tout x non nul, il existe α_x réel tel que $T(x) = \alpha_x x$.
Soit u un vecteur non nul fixé et $\alpha = \alpha_u$. Si x est colinéaire à u, il existe λ tel que $x = \lambda u$ et on a :

$$T(x) = \lambda T(u) = \lambda\alpha u = \alpha x$$

Si x n'est pas colinéaire à u, $u + x$ est non nul et on a alors :

$$T(x + u) = T(x) + T(u) = \alpha_x x + \alpha u = \alpha_{x+u}(u + x)$$

La famille (u, x) étant libre : $\alpha = \alpha_{x+u} = \alpha_x$ ce qui prouve que pour tout x (l'égalité étant triviale pour le vecteur nul), $T(x) = \alpha x$ soit T est une homothétie. On a montré :

$$\forall x,\ (x, T(x)) \text{ liés} \Longrightarrow \exists\alpha, \quad T = \alpha I$$

Par contraposition

Si T n'est pas une homothétie, il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas liés.

12. Soit e_1 un élément tel que e_1 et $T(e_1)$ ne soient pas colinéaires (un tel vecteur existe par la question précédente). On peut compléter cette famille libre en une base $\mathcal{B} = (e_1, T(e_1), e_3, \cdots, e_n)$ de X et dans cette base T a la matrice recherchée.

13. Procédons par récurrence.

• Initialisation : $n = 2$. On a trouvé dans la question précédente une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

or $\operatorname{tr} \mathrm{T} = \mathrm{a}$ donc $a = 0$. La base $\mathcal{B}$ convient.

• Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n-1 \geq 1$.On a montré dans la question précédente l'existence d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & ?\text{`x} & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{A} \in ?\text{`}M_{n-1}$. Comme $\operatorname{tr}(\mathrm{T}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A})$, $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = 0$.
Si $\mathbb{A}$ est de la forme $\alpha \mathbb{I}_{n-1}$, $\alpha = 0$ et la base $\mathcal{B}$ convient.
Sinon soit T_1 l'endomorphisme de $X_1 = \operatorname{Vect}(e_2, \cdots, e_n)$ de matrice $\mathbb{A}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \{e_2, \cdots, e_n\}$. Cet endomorphisme n'est pas une homothétie et est de trace nulle.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}'_1 = \{e'_2, \cdots, e'_n\}$ dans laquelle $\mathbb{A}_1$ la matrice de T_1 a une diagonale (principale) de 0. Soit $\mathcal{B}' = \{e - 1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ base de X. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de T n'a que des 0 sur la diagonale. On peut le montrer matriciellement ou en vectoriellement.

Méthode matricielle : Soit $\mathbb{Q}_1$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}'_1$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ?\text{`x} & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Soit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1^{-1} & \\ \times & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_1 & \\ \times & & & \end{pmatrix}$$

matrice dont la diagonale est composée d'un 0 suivi des éléments diagonaux de $\mathbb{A}_1$ nuls par construction.

Méthode vectorielle : Par la matrice précédente, $T(e_1) \in X_1$ ce qui justifie que dans $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ ait un 0 en ligne 1 colonne 1.
Si $x \in X_1$,$T(x) = \alpha_x e_1 + T_1(x)$; aussi, la composante de $T(e'_i)$ sur e'_i est la même que celle de $T_1(e'_i)$; elle est donc nulle. Tous les termes diagonaux de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ sont donc nuls.

Ainsi

Il existe une base dans laquelle la matrice de T n'a que des 0 sur sa diagonale.

14. Soit $T' = T - t_1 I$. Cet endomorphisme n'est ni une homothétie ni l'endomorphisme nul puisque T n'est pas colinéaire à I. Par la question 1, il existe $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

où $a = \mathrm{tr}\,\mathrm{T}' = \mathrm{tr}\,\mathrm{T} - \mathrm{t_1 tr}\,\mathrm{I} = (\mathrm{t_1} + \mathrm{t_2}) - 2\mathrm{t_1} = \mathrm{t_2} - \mathrm{t_1}$ d'où

$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & t_2 - t_1 \end{pmatrix} + t_1 \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} t_1 & b \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}}$$

15. Par la propriété admise, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = t_1 L$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$. Par la question 9, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $E = R(L) \oplus N(L)$

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix}.$$

et par la question 10 comme $L'Tl'$ n'est pas proportionnel à I, $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice colinéaire à I.

16. La récurrence est suggérée et a été initialisée pour $n = 2$ en question 14.Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n - 1 \geq 2$ et démontrons la à l'ordre n. Par la question précédente, il existe $\mathcal{C} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ telle que :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix}.$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie et $\mathrm{tr}\,(\mathbb{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) - \mathrm{t_1} = \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{t_i}$.

Soit T_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Vect}(\mathrm{e_2}, \cdots, e_n)$ de matrice $\mathbb{B}$ dans la base $\mathcal{C}_1 = \{\mathrm{e_2}, \cdots, e_n\}$. T_1 n'est donc pas une homothétie et par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{C}''$ telle que $\mathbb{T}_{1,\mathcal{C}''} = \mathbb{B}'$ est une matrice de termes diagonaux $T_2, \cdots, t_n$.

Soit $\mathcal{B}'' = \{e_1\} \cup \mathcal{C}''$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}''$ est $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_1 \end{pmatrix}$ où $\mathbb{Q}_1$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}''$ et $\mathbb{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_1^{-1} \end{pmatrix}$. Un calcul en blocs identique à celui de la question 13 donne alors :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}' & \\ \times & & & \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice a bien comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_n$. Ainsi on a vérifié par récurrence que :

> il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in [\![1, n]\!]$.

4 -Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *On pose* $\rho = \mathrm{rg}\,T$ *et* $\theta = \mathrm{tr}\,\mathrm{T}$.

17. Par le théorème du rang, $\dim N(T) = n - \rho$. Soit X_1 un supplémentaire de $N(T)$ et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base adaptée à la décomposition $X = F \oplus N(T)$.

> Dans cette base $\mathcal{B}$, $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

18. Soit T_1 l'endomorphisme de X_1 de matrice $\mathbb{T}_1$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \cdots, e_\rho\}$.
Comme $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_1) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_1)$, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_1)$ est élément de $\mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_1) \geq \rho$.
Soient $t_i = 1$ pour $i \in [\![1, \rho - 1]\!]$ et $t_\rho = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) - (\rho - 1) \geq 1$. Ces ρ nombres sont des entiers naturels non nuls dont la trace est égale à $\mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_1)$. Par la question 16, T' n'étant pas une homothétie, il existe $\mathcal{B}_1''$ une base de X_1 où $\mathbb{T}_1'$ la matrice de T' dans la base $\mathcal{B}_1''$ admet comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_\rho$. Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{1\cup}''\{e_{\rho+1}, \cdots, e_n\}$.

> Dans cette nouvelle base, la matrice de T a la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1' & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2' & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ où $\mathbb{T}_1'$ a comme éléments diagonaux des entiers non nuls.

19. Soient $C_1, \cdots, C_\rho$ les premières colonnes de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$. Soit P_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathbb{P}_{\sqsupset\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{t_i}C_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant un 1 en place (i, i), on a $\mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$, ce qui prouve que les P_i sont des projecteurs. Ainsi

> $$T = \sum_{i=1}^{\rho} t_i P_i = \underbrace{P_1 + \cdots P_1}_{t_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{P_\rho + \cdots + P_\rho}_{t_\rho \text{ fois}}.$$

20. Comme $\mathbb{T}_1 = \alpha\mathbb{I}_\rho$, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) \geq \rho$ donne $\alpha \geq 1$. Si $\alpha = 1$, on peut utiliser la méthode précédente (on peut même l'utiliser si $\alpha \in \mathbb{N}$) en décomposant en somme de ρ projecteurs de rang 1 .
Si $\alpha > 1$, soit P_0 de matrice $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{O} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ dans la bas $\mathcal{B}'$. Alors $T - P_0$ a pour matrice :

$(\mathbb{T} - \mathbb{P}_0)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1'' & 0 \\ \mathbb{T}_2' & 0 \end{pmatrix}$ où T_1'' est une matrice ayant pour éléments diagonaux $(\alpha - 1, \alpha, \cdots, \alpha)$: ce n'est donc pas une matrice d'homothétie. De plus, $T - P_0$ est de rang au plus ρ (sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ a $n - \rho$ colonnes nulles). Ainsi $T - P_0$ vérifie

$$tr(T-P_0) = \rho\alpha - 1 > \rho - 1 \Longrightarrow tr(T-P_0) \geq \rho \geq \text{rg}\,(T-P_0)$$

donc on peut appliquer la question précédente. $T' = T - P_0$ est une somme de projecteurs et comme $T = P_0 + (T - P_0)$:

$$\boxed{T \text{ est une somme de projecteurs}}$$

On a ainsi prouvé que T est une somme de projecteurs si et seulement si sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à son rang.

Problème version soft

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

I.A.1) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$). Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (da_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)}$$

I.A.2) Notons que $\tau^0(P) = P$.
Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
Ainsi, par récurrence

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

I.A.3) D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure, donc $\det(\lambda I_{n+1} - M) = 0$ si et seulement si il existe j tel que $\lambda = \binom{j-1}{j-1} = 1$.
Si M était semblable à une matrice diagonale D, alors on aurait également $\det(\lambda I_{n+1} - D) = 0$ si $\lambda = 1$, d'où $D = I_{n+1}$ M serait serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.
Ainsi, il n'existe pas de matrices $P \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.

I.A.5) Comme $det(\tau)$ est différent de 0,

$$\boxed{\tau \text{ est bijective}}$$

Puis si on considère $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,
on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \text{id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\boxed{\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)}$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$. Donc la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

I.A.6) Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\boxed{\forall i,j \in [1,n],\ (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

I.A.7) La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$\boxed{Q = M^T}$$

I.A.8) M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.
Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.
La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})^T\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j$$

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j}$$

I.A.9) On a alors

$$\boxed{v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k}$$

On vérifie bien :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k}$$

I.B - L'opérateur de différence

I.B.1) Avec les mêmes notations qu'en 1.*A*.1), avec P *non constant* on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1}X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = da_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)}$$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.
Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
Donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

I.B.3) Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leqslant (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Si $P \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.
Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leqslant n - j$.
Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

I.B.4) Notons Δ, la matrice de δ dans la base (P_k).
Par construction de $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.
Puis comme M commute avec I_{n+1}, alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(-1)^{k-j} M^j$
Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

I.B.5) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = [\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.
Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0}$$

I.B.6) a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.
Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.
Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairemen
$a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.
Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.
Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbf{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

I.B.7) a) On a vu (questions $I.B.3$)) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \operatorname{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit V stable par δ.
Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \operatorname{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^n(P)) \subset V$.
Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...
V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.
Notons $(e_0, \dots e_d)$ une base de V. Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d.

Sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.
Donc il existe P dans V de degré $r \geqslant d$.
Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in [\![0, n]\!] \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

II.A.1) Si φ est une surjection de E sur F, alors nécessairement $\#F \leqslant \#E$. Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$\boxed{S(n, n) = n!}$$

II.A.3) Les surjections de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $[1, n]$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

— Le choix de deux éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités
— Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\boxed{S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}}$$

II.B - Recherche d'une expression générale

II.B.1) *Le résultat ne fait pas partie du programme. Il faut le démontrer.*
Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = [1, n]$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donné pour chacun des p élément de E d'un unique élément de F. Donc pour chacun des p éléments de E, il y a n possibilités.
Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\boxed{\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } [1, n] \text{ est donc } n \times n \cdots \times n = n^p}$$

II.B.2) Notons $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \to [1, n] | \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^{n} \#I_k$$

Il reste à dénombrer I_k. Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :
— Le choix de k éléments de $\mathbb{N}_n$ qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p)$: $\binom{n}{k}$ possibilités
— Puis, le choix des surjections de $\mathbb{N}_p$ sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités
Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\boxed{n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k)}$$

avec la convention $S(p, 0) = 0$.

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en $I.A.8$), (p constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p,k)$, donc

$$\boxed{\forall p \geqslant n,\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

II.B.4) Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après $I.B.5$),

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p,n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

II.C) Avec les questions précédentes :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n,n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1,n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}}$$

III Etude d'une famille de polynômes

III.A - Généralités

III.A.1) Pour tout $k \in [0,n]$, $\deg(H_k) = k$.
Donc la famille $(H_0, H_1, \dots H_n)$ est une famille de degrés échelonnés, donc elle est libre.
Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\boxed{(H_0, H_1, \dots H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

III.A.2) $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.
Et pour tout $k \in [1,n]$,

$$\delta(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right)$$

$$= \frac{1}{k!} \left((X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right)$$

$$\delta(H_k) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \times k = H_{k-1}$$

Bilan :

$$\boxed{\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [1,n],\ \delta(H_k) = H_{k-1}}$$

III.A.3) Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$.
Par conséquent,

$\boxed{M \text{ et } M\prime \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}}$

III.A.4) Pour tout $k, \ell \in [\![0, n]\!]$, on a (*par récurrence pour* $\ell \geqslant k$) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si} \quad \ell \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.
Par conséquent :

$$\boxed{\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

III.A.5) Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
il existe $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell H_\ell$.
Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell}^{n} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k}$$

III.B - Étude d'un exemple

III.B.1) Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.
Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour k de 0 à 3. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7\,,\ \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8\,,\ \delta^2(T)(X) = 6X + 10\,,\ \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc

$$\boxed{T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

III.B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\boxed{\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

III.B.3) Considérons (p_n) une solution particulière.
Toute autre solution (u_n) vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k = (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k)$$

$$= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0$$

Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$,
et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$

Reste à trouver une solution paticulière. On a vu que $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.
Avec P tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$ et $p_k = P(k)$, on a une solution particulière.
Enfin, comme pour $k \geqslant h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!} k(k-1)\ldots(k-(h-1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_k(h) = 0$; on a

III.C - Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.
Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1))$$

$$= \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$\boxed{H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si} \quad k \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k \in [0, n-1] \\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}}$$

III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisqu'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$$

III.C.3) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)}$$

III.C.4) Si P est à valeurs entières sur les entiers,
alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;
et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entières.
Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,
alors $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^d a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).
Bilan :

$$\boxed{P \text{ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans } (H_k) \text{ sont entières}}$$

III.C.5) Supposons que P, de degré d, est à valeurs entières sur les entiers,
Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$.
Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^{d} a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^{d}\left(a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1}(X-j)\right)$$

$$\boxed{\text{Il s'agit bien d'un polynôme } d!P \text{ à coefficients entiers.}}$$

Comme le montre le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 :
on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$$