TD3

Diffusion de particules

Questions de cours

- ➢ Quels sont les deux processus de transports de particules
- ➢ Définir la section efficace
- ➢ Définir le libre parcours moyen et le relier à la section efficace
- ➢ Définir le flux de particules et le vecteur densité de courant de particules
- ➢ Donner la loi de Fick
- ➢ Quel est l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion d'un gaz
- ➢ Démontrer l'équation de conservation de la matière de façon locale puis globale
- ➢ Démontrer l'équation de la diffusion
- ➢ Donner l'expression du gradient, de la divergence et du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes
- ➢ Déterminer la relation en la longueur caractéristique de diffusion et la distance caractéristique de diffusion

Applications du cours

Exercice 1 - Équation de conservation de la matière en coordonnées cylindriques - ♥♥♥ / ★

On considère un matériaux cylindrique d'axe Oz, de hauteur h et de rayon R_2. On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique de rayon R_1 remplie d'un gaz de densité particulaire n_1 maintenue constante. On suppose que la diffusion dans le cylindre est seulement radiale c'est à dire $n(M,t) = n(r,t)$ en coordonnées cylindriques. On suppose qu'il n'y a ni création ni disparition de particules dans le milieu.

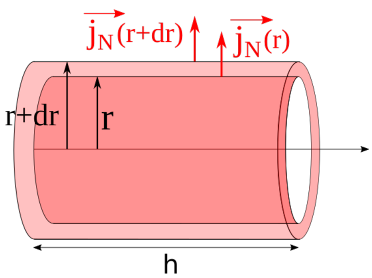
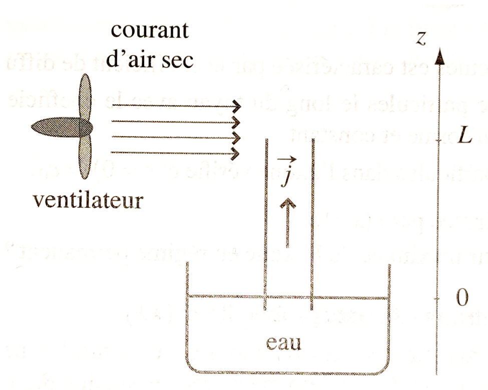


FIGURE 1 : Diffusion radiale

1. Déterminer l'expression simplifiée de $\overrightarrow{j_N}(M,t)$

2. Effectuer un bilan de matière entre deux cylindre de rayon r et $r+dr$. En déduire l'équation de conservation de la matière dans le matériaux.
3. En déduire l'équation de la diffusion.
4. Vérifier à l'aide de l'expression du laplacien scalaire donné en annexe du cours que l'équation trouvée précédemment correspond bien.
5. On se place en régime stationnaire. Exprimer $n(r)$ pour r compris entre R_1 et R_2 en fonction de n_1, r, D, R_1 et j_{N1} (densité de flux de particules en $r = R_1$). En déduire le vecteur densité de flux de particules en fonction de $\overrightarrow{j_{N1}}$, R_1 et r.

Exercice 2 - Mesure du coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air - ♥ / ★★



Un tube vertical, de section $S = 20cm^2$ plonge dans un récipient rempli d'eau. L'eau s'évapore et la vapeur d'eau diffuse à travers l'air dans le tube. À l'extrémité supérieur du tube, un ventilateur souffle un courant d'air sec qui chasse les molécules de vapeurs d'eau, de telle sorte que la concentration en vapeur d'eau au sommet du tube, en $z = L$, peut être considérée comme nulle. Le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air est D. La mesure de la masse d'eau évaporée pendant une durée donnée permet de déterminer la valeur numérique de D comme nous allons le montrer dans cet exercice.
On suppose le régime permanent établi.

1. Exprimer la densité de molécules de vapeur d'eau dans le tube, $n(z)$, en régime permanent en fonction de sa valeur n_0 en $z = 0$.
2. En déduire le nombre de molécules d'eau s'évaporant par unité de temps.
3. En $z = 0$, la vapeur d'eau est en équilibre avec l'eau liquide. En assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait, exprimer n_0 en fonction de la pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'expérience P_{sat}, de la température T, de la masse molaire M de l'eau, de la constante des gaz parfaits R et du nombre d'Avogadro N_A.
4. La masse d'eau évaporée est de $87mg$ par jour. En déduire la valeur numérique de D. Comparer à sa valeur tabulée à $25°C$ et $P = 1,013bar$: $D = 2,42.10^{-5}m^2.s^{-1}$.

Données : $L = 1,0m$, $P_{sat} = 3,2.10^3Pa$.

Exercice 3 - Réacteur nucléaire - ♥♥♥ / ★

On étudie un réacteur nucléaire à une dimension : la densité volumique de neutrons est $n(x,t)$. En moyenne, $\dfrac{n}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume, et , pour un neutron absorbé, K neutrons sont produits ($K > 1$). Enfin , leur diffusion dans le milieu satisfait à la loi de Fick, le coefficient de diffusion étant D. Le réacteur est situé entre les plans d'abscisses $x = -a$ et $x = +a$. On impose $n(\pm a, t) = 0$.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$ (équation (1)).
2. Dans cette question, on se place en régime permanent. Déterminer $n(x)$ sachant que $n(0) = n_0$.
3. On se place en régime quelconque. On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme $n(x,t) = f(x)\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$.
   Déterminer $f(x)$ et T et discuter de la stabilité du réacteur suivant les valeurs de la longueur $L = 2a$ du réacteur.

Approfondissement

Exercice 4 - Équilibre d'une atmosphère isotherme

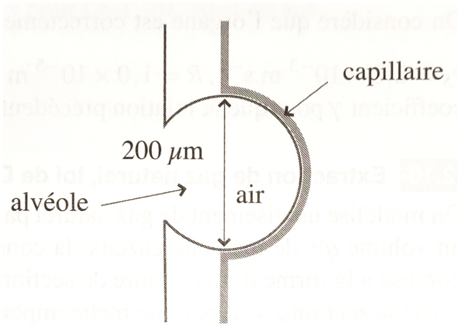
On considère l'équilibre hydrostatique d'une atmosphère isotherme de gaz parfait.

1. A l'aide de la loi des gaz parfait et de la relation d'hydrostatique des fluides, montrer que la masse volumique $\rho(z)$ de l'air en fonction de l'altitude s'écrit :
$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$$
2. (a) Montrer en utilisant la loi de Fick qu'il existe un courant de diffusion dirigé vers le haut. Calculer la vitesse moyenne u associée à ce courant en fonction du coefficient de diffusion D et des données du problème.
   (b) En déduire qu'il doit exister un courant descendant de molécules de vitesse moyenne $-u$. Quel en est le moteur ?
3. En supposant que les collisions subies par une molécule de gaz sont en moyenne équivalentes à une force de frottement αu dirigée en sens inverse à la vitesse $-u$, exprimer le coefficient de frottement α en fonction de D et des données du problème. Calculer α et u.

Données : $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$; $D = 1,8.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$

Exercice 5 - Oxygénation du sang - ♥♥ / ★★

1. Les organes ont besoin régulier en oxygène. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans un milieu aqueux est $D_{eau} \simeq 10^{-9}\ m^2.s^{-1}$.
   Montrer, par une estimation numérique qualitative, que le transport de l'oxygène vers un organe ne saurait se faire par le seul phénomène de diffusion à travers la peau. Par quel mécanisme dominant le sang transporte-t-il l'oxygène ?
2. Le sang se charge en oxygène par diffusion de l'oxygène contenu dans les alvéoles du poumon vers le capillaire périphérique de l'alvéole. Les alvéoles sont supposées sphériques, de rayon $R_{alv} = 10^{-4}\ m$.



(a) Calculer le temps de contact, δt_s, du sang avec l'alvéole.

Le rayon capillaire est $R_{cap} = 10^{-5}\ m$. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'air est $D_{air} \simeq 1,8.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$.

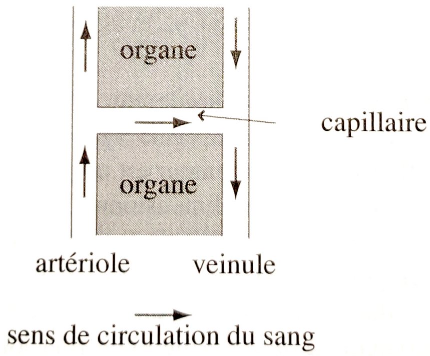
(b) Estimer le temps de diffusion d'une molécule d'oxygène par ce mécanisme, en convenant que c'est la somme du temps de diffusion dans l'air (alvéole) et du temps de diffusion en milieu aqueux (capillaire).

(c) Montrer que l'échange d'air entre l'alvéole et le sang a le temps de s'établir.

3. L'alimentation d'un organe en nutriment transporté par le sang s'effectue par un échange entre le sang et l'organe, à travers les parois des capillaires. Ces capillaires sont des tubes cylindriques de rayon R et de longueur L, joignant une artériole à une veinule. On note $C_c(z)$ la concentration molaire (en $mol.m^{-3}$) d'un nutriment dans le capillaire et $C_{org}(z)$ celle du nutriment dans l'organe à proximité de la surface du capillaire. Le capillaire cède à l'organe le nutriment avec une densité de courant molaire (flux surfacique) :

$$j = \gamma(C_c(z) - C_{org}(z))$$

où γ est un paramètre constant.



(a) Déterminer la dimension de γ.

(b) On considère le régime stationnaire. Effectuer le bilan de matière en nutriment, exprimant l'équilibre dynamique des flux entrant et sortant entre les tranches de cotes z et $z + dz$ et en déduire l'équation vérifiée par $C_c(z)$, en supposant que le sang a une vitesse d'écoulement constant, v_s. Cette équation fait intervenir la fonction $C_{org}(z)$.

4. On admet ici que $C_{org}(z) = K$ est constante ;

(a) Déterminer alors $C_c(z)$ en fonction de $K, C_c(0)$ et de la longueur caractéristique $L_0 = \dfrac{Rv_s}{2\gamma}$.

(b) On considère que l'organe est correctement alimenté si : $\left|\dfrac{C_c(L)-K}{C_c(0)-K}\right| \geq 0,3$. Sachant que $v_s = 2,8.10^{-3}\ m.s^{-1}$, $R = 1,0.10^{-5}\ m$ et $L = 1,0\ mm$, déterminer la valeur maximale du coefficient γ pour que la relation précédente soit satisfaite.

Élements de réponse

1. $n(r) = j_{N_1}\frac{R_1}{D}\ln\frac{R_1}{r} + n_1$; $\overrightarrow{j_N}(r) = j_{N_1}\frac{R_1}{r}\overrightarrow{e_r}$
2. $n(z) = n_0(1 - z/L)$; $\phi = DSn_0/L$; $n_0 = P_{sat}N_A/RT$; $D = \frac{RTm}{SP_{sat}M\tau} = 2,2.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
3. $D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{K-1}{\tau}n = \frac{\partial n}{\partial t}$;
   En régime permanent les dérivées temporelles sont nulles, $n(x) = n_0\cos(\frac{\pi x}{2a})$;
   $f(x) = n_0\cos(\frac{\pi x}{2a})$ si $2a < \pi\frac{D\tau}{K-1}$ sinon n diverge.
4. Relation d'hydrostatique $\frac{dP}{dz} = -\rho g$; $u = \frac{Dmg}{k_BT}$; $\alpha = k_BT/D = 2,1.10^{-16}\ kg.s^{-1}$ et $u = 1,1\ m.s^{-1}$.
5. 1) $\tau \simeq 29$ jours
   2) $\delta t_S = 0,3s$; $\tau_d \simeq 0,1s$
   3) $\frac{dC_c}{dz} + \frac{2\gamma}{Rv}(C_c(z) - C_{org}(z)) = 0$
   4) $\gamma < 1,7.10^{-3}\ m.s^{-1}$