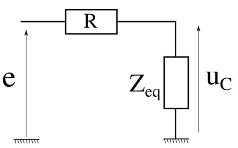
DM 1
Thermodynamique et électricité

Corrigé

Problème II : Filtre de Hartley

1. En utilisant le diviseur de tension on obtient $\frac{\underline{s}}{\underline{u_c}} = \frac{jL\omega}{jL\omega + jL\omega} = \frac{1}{2}$
   D'autre part le circuit est équivalent à :

   On obtient donc par un autre diviseur de tension :

   $$\frac{\underline{u_c}}{\underline{e}} = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \quad \text{avec} \quad Z_{eq} = \frac{Z_c Z_{2L}}{Z_c + Z_{2L}} = \frac{Z_{2L}}{1 + Y_c Z_{2L}} = \frac{2jL\omega}{1 - 2LC\omega^2}$$

   Finalement la fonction de transfert du circuit est :

   $$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{u_c}} \times \frac{\underline{u_c}}{\underline{e}} = \frac{1}{2} \times \frac{2jL\omega}{1 - 2LC\omega^2} \left(\frac{1}{R + \frac{2jL\omega}{1 - 2LC\omega^2}} \right)$$

   $$\underline{H} = \frac{jL\omega}{(1 - 2LC\omega^2)} \frac{(1 - 2LC\omega^2)}{R(1 - 2LC\omega^2) + 2jL\omega}$$

   $$\underline{H} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 - 2LC\omega^2 + 2j\frac{L}{R}\omega}$$

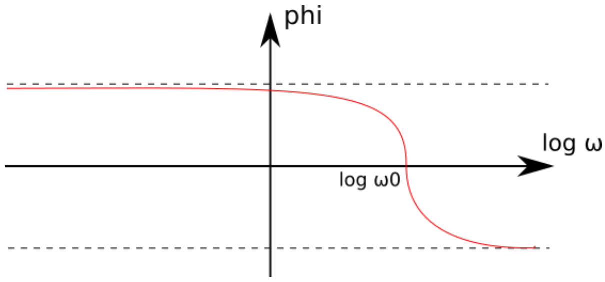
   On a bien la formule demandée avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$, $Q = \frac{R}{L}\sqrt{2LC}$ et $H_0 = \frac{1}{Q} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{2C}}$
   Finalement : $\underline{H} = \underline{H_0} \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$

2. A basse fréquence : $\underline{H} \simeq H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}$ donc $G = H_0 \frac{\omega}{\omega_0}$, $G_{dB} = 20log\frac{H_0}{\omega_0} + 20log\omega$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$
   On a une asymptote de pente +20dB/décade à basse fréquence

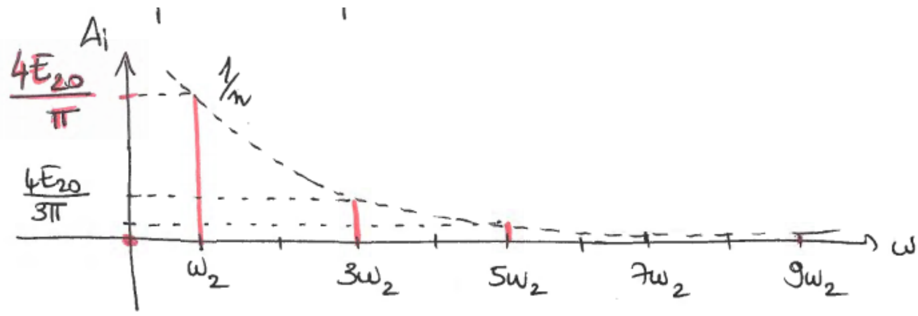
   A haute fréquence : $\underline{H} \simeq -H_0 j\frac{\omega_0}{\omega}$ donc $G = H_0\frac{\omega_0}{\omega}$, $G_{dB} = 20logH_0\omega_0 - 20log\omega$ et $\phi = -\frac{\pi}{2}$
   On a une asymptote de pente -20dB/décade à haute fréquence

   Ces deux asymptotes se croisent en lorsque $20log\frac{H_0}{\omega_0} + 20log\omega = 20logH_0\omega_0 - 20log\omega$
   Les asymptotes se croisent donc en $\omega = \omega_0$

   La valeur de l'ordonnée de ce point d'intersection est : $\beta = 20logH_0 = 20log\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{2C}}$
   AN : $\beta = -43dB$
   La fonction de transfert en $\omega = \omega_0$ est $H(j\omega_0) = \frac{jH_0}{1 - 1 + 2\frac{j}{Q}} = \frac{j\frac{1}{Q}}{2\frac{j}{Q}} = \frac{1}{2}$
   On a donc $\alpha = G(\omega_0) = \frac{1}{2}$, ainsi $G_{dB} = -6dB$ et $\phi = 0$
   La courbe de phase est la suivante :



3. A basse fréquence on a une pente de +20dB/décade et $\phi = +\frac{\pi}{2}$: c'est donc un dérivateur
   A haute fréquence on a une pente de -20dB/décade et $\phi = -\frac{\pi}{2}$: c'est donc un intégrateur
4. Pour réaliser ce signal en TP, on utilise un GBF en mode sinusoïdal (d'amplitude E_1 et de fréquence $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$) auquel on ajoute un offset d'amplitude E_0 (tension continue)
5. En régime permanent (RSF)
   Pour $\omega = 0$ on a $\underline{H}(0) = 0$ la composante continue est coupée
   Pour $\omega_1 = \omega_0$ on a $\underline{H}(\omega_0) = \frac{1}{2}$ l'amplitude de la composante de fréquence ω_1 est divisée par 2
   On a finalement : $s_1(t) = \frac{E_1}{2} cos(\omega_1 t)$
6. On étudie maintenant le signal $s_2(t)$ créneau :
   La valeur efficace de $e_2(t)$ est donnée par : $E_{2,eff}^2 =< e_2(t)^2 >= \frac{1}{T}\int_0^T e_2(t)^2 \, \mathrm{d}t$
   On sépare en deux demi-périodes :
   $E_{2,eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} E_{2,0}^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} (-E_{2,0})^2 \, \mathrm{d}t$
   $E_{2,eff}^2 = \frac{1}{T} E_{2,0}^2 (\frac{T}{2} - 0) + \frac{1}{T} E_{2,0}^2 (T - \frac{T}{2})$
   $E_{2,eff}^2 = E_{2,0}^2$ et donc $E_{2,eff} = E_{2,0}$
7. Allure du spectre d'amplitude :



   Avec $\omega_2 = \frac{\omega_0}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2LC}} = 2,36.10^5 rad.s^{-1}$
   Fondamental : $\omega_2 = 2,36.10^4 rad.s^{-1}$
   Premier harmonique non nul : $3\omega_2 = 7,07.10^4 rad.s^{-1}$
   Deuxième harmonique non nul : $5\omega_2 = 1,18.10^5 rad.s^{-1}$
   Troisième harmonique non nul : $7\omega_2 = 1,65.10^5 rad.s^{-1}$
8. Le gain du filtre est donné par $G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{(1-\frac{\omega}{\omega_0})^2 + (\frac{2\omega}{Q\omega_0})^2}}$
   On remarque que le gain maximum du filtre est obtenu pour $\omega = \omega_0$ soit ici $\omega = \omega_0 = 3\omega_2$
   La fréquence qui sera le plus amplifié est celle de l'harmonique de rang 3, ce qui justifie a priori le nom de tripleur de fréquence pour ce filtre.
   On vérifie toutefois l'amplitude de sortie pour chaque fréquence car les amplitudes d'entrée ne sont pas toutes les mêmes.

pulsation de la composante spectrale, en $krad.s^{-1}$	amplitude de l'entrée (V)	gain du filtre	amplitude de sortie (V)
fondamental $\omega_2 = \frac{\omega_0}{3}$ $\omega_2 = 23{,}6$ $krad.s^{-1}$	$\frac{4E_{20}}{\pi} = 1{,}27$	$2{,}65.10^{-3}$	$3{,}38.10^{-3}$
harmonique $n = 3$ $3\omega_2 = \omega_0 = 70{,}7$ $krad.s^{-1}$	$\frac{4E_{20}}{3\pi} = 0{,}42$	$0{,}5$	$2{,}12.10^{-1}$
harmonique $n = 5$ $5\omega_2 = \frac{5}{3}\omega_0 = 118$ $krad.s^{-1}$	$\frac{4E_{20}}{5\pi} = 0{,}25$	$6{,}63.10^{-3}$	$1{,}69.10^{-3}$
harmonique $n = 7$ $7\omega_2 = \frac{7}{3}\omega_0 = 165$ $krad.s^{-1}$	$\frac{4E_{20}}{7\pi} = 1{,}7.10^{-2}$	$3{,}71.10^{-3}$	$6{,}75.10^{-4}$

L'harmonique de rang 3 est bien d'amplitude largement plus élevée que les autres.