
DS 1+

Thermodynamique et électricité

Vendredi 18 septembre 2020

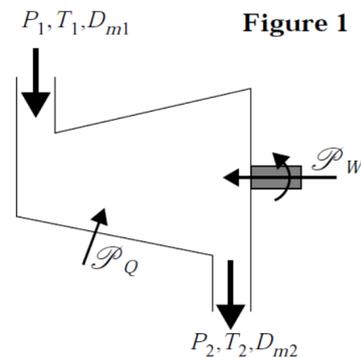
Problème I : Étude d'une turbine (Centrale TSI)

A - Étude d'une turbine

Dans une turbine, un fluide passe des conditions ① (pression P_1 , température T_1 , vitesse v_1 , enthalpie massique h_1) à l'entrée, aux conditions ② (pression P_2 , température T_2 , vitesse v_2 , enthalpie massique h_2) à la sortie (figure 1).

Dans la turbine, le fluide reçoit algébriquement de l'extérieur une puissance mécanique utile \mathcal{P}_w (cette puissance n'inclut pas la puissance des forces de pression au niveau des surfaces d'entrée et de sortie) et une puissance thermique \mathcal{P}_Q .

On néglige toute variation d'énergie potentielle et on se place en régime permanent.



1. Montrer que les débits massiques entrant D_{m1} et sortant D_{m2} (masse de fluide entrant ou sortant par unité de temps) sont égaux. On pose $D_{m1} = D_{m2} = D_m$.
2. Montrer que l'application du premier principe à une quantité de fluide que l'on définira de manière précise, conduit à :

$$D_m \left[\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \right] = \mathcal{P}_w + \mathcal{P}_Q$$

Une turbine à vapeur fonctionne dans les conditions suivantes :

	Pression (bar)	Température (K)	Vitesse (m.s ⁻¹)	Enthalpie (kJ.kg ⁻¹)
Entrée (1)	60	713	160	3277,2
Sortie (2)	0,95		80	2673,2

Pour un débit massique $D_m = 20 \text{ kg s}^{-1}$, la turbine fournit une puissance $(-\mathcal{P}_w) = 11,5 \cdot 10^6 \text{ W}$.

3. Calculer la puissance thermique \mathcal{P}_Q et préciser le sens de ce transfert thermique.
4. Calculer le rapport $\left| \frac{\mathcal{P}_Q}{\mathcal{P}_w} \right|$. Commenter.
5. Calculer le rapport $\left| \frac{\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}}{h_2 - h_1} \right|$. Commenter.

Dans toute la suite du problème, on considérera une turbine à gaz simple où le fluide en entrée et en sortie est assimilée au même gaz parfait de masse molaire M , de capacités thermiques massiques à volume constant c_V et à pression constante c_P .

On donne $c_P = 1,0087 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,4$ et $r = \frac{R}{M} = 0,2882 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

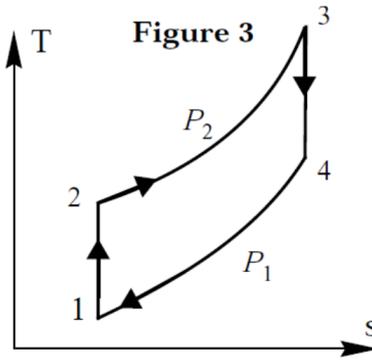
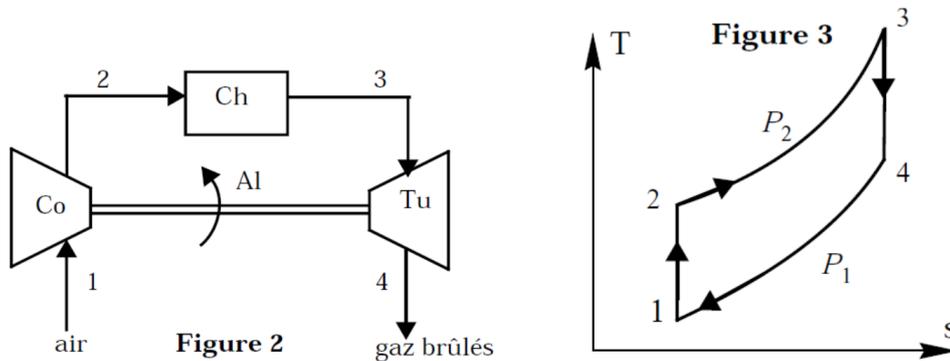
On utilisera la relation établie (ou pas) à la question ??.

Les travaux définis dans les paragraphes suivants n'incluront jamais le travail des forces de pression au niveau des surfaces d'entrée et de sortie des dispositifs considérés.

B - Cycle de Joule (ou cycle Brayton)

★ Cycle idéal

La figure 2 schématise le fonctionnement d'un turbine à gaz; elle comprend un compresseur "Co" qui puise l'air dans l'atmosphère, une chambre de combustion "Ch" dans laquelle l'air est brûlé par un carburant dont on négligera le débit massique, et une turbine "Tu" alimentée par les gaz chauds issus de la chambre de combustion; la turbine entraîne le compresseur à l'aide d'un arbre de liaison "Al".



La figure 3 représente en diagramme entropique (entropie massique s en abscisse et température T en ordonnée) le cycle qui commande le fonctionnement idéal du dispositif.

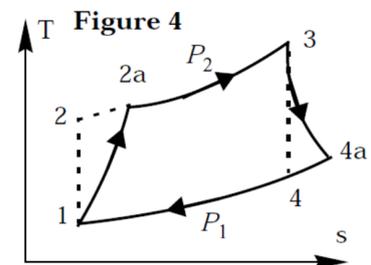
- ① → ② : évolution isentropique dans le compresseur "Co" durant laquelle l'air reçoit, par unité de masse, le travail W_{Co} .
- ② → ③ : évolution isobare à la pression P_2 pendant la combustion qui fournit au gaz, par unité de masse, le transfert thermique Q_E
- ③ → ④ : évolution isentropique dans la turbine "Tu" durant laquelle les gaz brûlés reçoivent algébriquement par unité de masse le travail W_{Tu} . Ce travail sert en partie à faire fonctionner le compresseur et le reste est disponible pour le milieu extérieur.
- ④ → ① : évolution isobare à la pression P_1 lors de l'éjection des gaz brûlés, qui reçoivent algébriquement, par unité de masse, le transfert thermique Q_S .

6. Représenter le cycle de Joule ainsi décrit en diagramme de Clapeyron : volume massique V/m en abscisse et pression P en ordonnée.
7. En utilisant la relation obtenue à la question ?? et en négligeant les variations d'énergie cinétique, exprimer les travaux W_{Co} et W_{Tu} ainsi que les transferts thermiques Q_E et Q_S en fonction de c_P et des températures T_1 , T_2 , T_3 et T_4 correspondant respectivement aux points ①, ②, ③ et ④ de la figure 3.
8. Quel est, en fonction de W_{Co} et W_{Tu} le travail W_F fourni par unité de masse par le système au milieu extérieur au cours d'un cycle ?

9. Définir le rendement thermodynamique η de la turbine à gaz. Déterminer l'expression de η en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4 , puis en fonction des seules températures T_1 et T_2 .
10. Déterminer l'expression de η en fonction du rapport des pressions $\alpha = \frac{P_2}{P_1}$ et du coefficient γ .
11. Application numérique : on donne $P_1 = 1,03$ bar, $T_1 = 300$ K, $P_2 = 10,3$ bar et $T_3 = 1300$ K.
Calculer T_2 et T_4 .
Calculer W_{Co} , W_{Tu} et Q_E .
Calculer le rendement η .

★ Cycle réel

En fait, le compresseur et la turbine ont des fonctionnements irréversibles et le cycle réel des gaz dans la turbine est représenté sur la figure 4 (les états ① et ③ étant inchangés).



- ① \rightarrow (2a) : l'évolution de l'air dans le compresseur "Co" n'est plus isentropique ; l'air y reçoit, par unité de masse, le travail $W_{Co,a}$.
- (2a) \rightarrow ③ : pendant la combustion, l'évolution reste isobare à la pression P_2 ; le gaz reçoit, par unité de masse, le transfert thermique $Q_{E,a}$.
- ③ \rightarrow (4a) : l'évolution des gaz dans la turbine "Tu" n'est plus isentropique ; les gaz brûlés reçoivent, algébriquement, par unité de masse, un travail $W_{Tu,a}$.
- (4a) \rightarrow ① : lors de l'éjection des gaz brûlés, l'évolution reste isobare à la pression P_1 ; les gaz reçoivent, algébriquement, par unité de masse, le transfert thermique $Q_{S,a}$.

On définit les efficacités η_{Co} et η_{Tu} respectives du compresseur et de la turbine par $\eta_{Co} = \frac{W_{Co}}{W_{Co,a}}$

et $\eta_{Tu} = \frac{W_{Tu,a}}{W_{Tu}}$, avec W_{Co} et W_{Tu} définis dans la partie précédente pour un fonctionnement réversible (les deux coefficients η_{Co} et η_{Tu} sont inférieurs à 1).

La relation obtenue à la question ?? est toujours valable et les variations d'énergie cinétique sont encore supposées négligeables.

On rappelle l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait :

$$s_{GP}(T, P) = c_P \ln \frac{T}{T_0} - r \ln \frac{P}{P_0} + s(T_0, P_0)$$

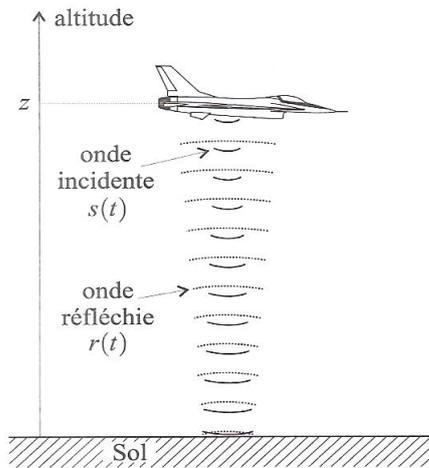
12. Calculer les températures respectives T_{2a} et T_{4a} des points 2a et 4a en fonction des températures T_1, T_2, T_3, T_4 et des coefficients η_{Co} et η_{Tu} .
13. Expliquer pourquoi les points (2a) et (4a) se situent respectivement à droite des points ② et ④ sur la figure 4.
14. Calculer le rendement η_a de cette turbine à gaz en fonction des températures T_1, T_{2a}, T_3 et T_{4a} .
15. Calculer la variation $\Delta s_{Co,a}$ d'entropie massique du gaz pendant l'évolution ① \rightarrow (2a) en fonction de T_1, T_{2a}, r, c_P et du rapport des pressions $\alpha = \frac{P_2}{P_1}$.

Calculer de même la variation $\Delta s_{Tu,a}$ d'entropie massique du gaz pendant l'évolution ③ \rightarrow (4a) en fonction de T_3 , T_{4a} , r , c_P et du rapport des pression $\alpha = \frac{P_2}{P_1}$.

16. Application numérique : on reprend les valeurs numériques précédentes, et on donne de surcroît $\eta_{Co} = 0,82$, $\eta_{Tu} = 0,85$.

Calculer T_{2a} , T_{4a} , η_a , $\Delta s_{Co,a}$ et $\Delta s_{Tu,a}$.

Problème II : Étude d'un altimètre (Mines PC)



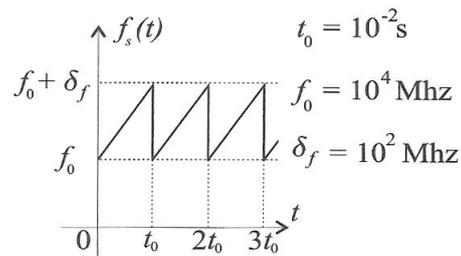
Le principe général d'un altimètre est très simple. Il est décrit sur la figure ci-contre. Un oscillateur embarqué dans l'avion émet un signal sinusoïdal $s(t)$ modulé en fréquence (c'est-à-dire que sa fréquence est variable avec le temps). Ce signal se propage verticalement à la vitesse $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Une antenne fixée sur l'avion permet à l'altimètre de mesurer son altitude z à partir du temps mis par l'onde radioélectrique pour effectuer l'aller-retour entre le sol et l'avion.

1. Expression de la fréquence modulée.

À partir du graphe de la figure ci-contre, établir la loi de variation de la fréquence $f_s(t)$ sur une période, en fonction de t , f_0 , δ_f et t_0 .

La fréquence $f_s(t)$ est en fait la fréquence instantanée du signal $s(t)$ émis par l'altimètre.

On a donc, si $s(t) = S_m \cos(\theta(t))$, une fréquence instantanée $f_s(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$.



2. Sachant que $s(0) = S_m$, déterminer l'expression de $s(t)$ en fonction de S_m , t , $\omega_0 = 2\pi f_0$ et $\omega_1 = \frac{\delta_f}{2f_0 t_0}$. On déterminera au préalable la fonction $\theta(t)$.

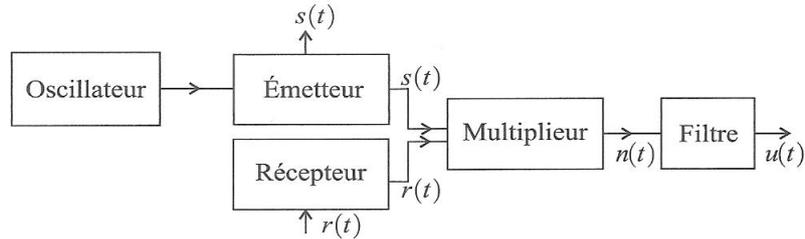
Tracer l'allure du graphe de $s(t)$ sur une durée t_0 , puis sur quelques t_0 .

3. On admet que le signal réfléchi par le sol puis capté par l'antenne de l'altimètre peut se mettre sous la forme $r(t) = \alpha \times s(t - \tau)$, où le paramètre τ est positif et homogène à un temps.

Après avoir donné la signification physique des paramètres α et τ , déterminer l'expression de τ en fonction de l'altitude z de l'avion et de la vitesse de propagation c de l'onde radioélectrique qu'il émet.

Quelle est la valeur numérique de τ si l'altitude de l'avion est $z = 3000 \text{ m}$.

4. Le schéma bloc décrivant le fonctionnement de l'altimètre est décrit sur la figure suivante. On admet que $\delta_f \ll f_0$ et $\tau \ll t_0$.



Montrer que le signal de sortie du multiplieur $n(t)$ peut s'écrire comme la somme de deux signaux sinusoïdaux dont l'un possède une fréquence instantanée f_1 qui ne dépend pas de t et l'autre une fréquence instantanée $f_2(t)$ qui varie avec t .

On donnera l'expression de f_1 en fonction de τ , δ_f et t_0 et celle de f_2 en fonction de t , τ , δ_f , t_0 et f_0 .

On rappelle la formule de trigonométrie :

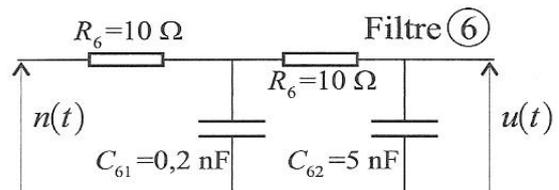
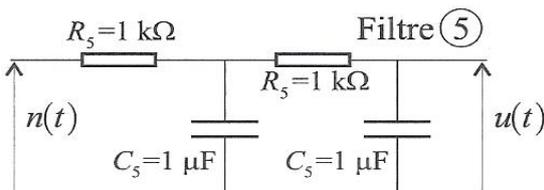
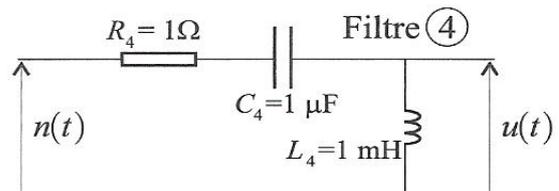
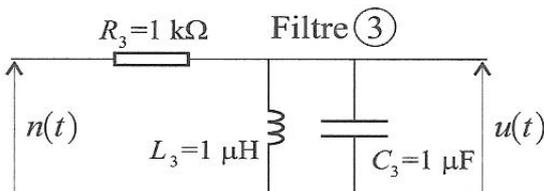
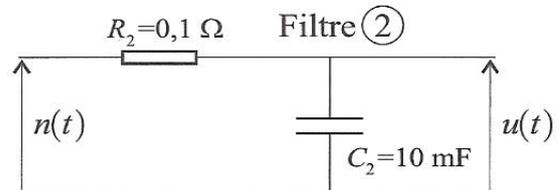
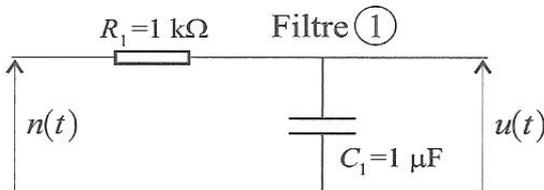
$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

5. Pour les avions standards, on a toujours $\tau \leq 100 \mu\text{s}$.

Quel type de filtre doit-on utiliser et comment calibrer ce dernier pour pouvoir obtenir un signal de sortie $u(t)$ qui permette de déterminer facilement la valeur de l'altitude z de l'avion ?

On justifiera la réponse et on pourra proposer un moyen effectif pour obtenir cette valeur.

6. Pour les filtres dont les schémas sont représentés sur la figure suivante, indiquer sans calculs (en vous basant sur les équivalents haute ou basse fréquence des composants) la fonction réalisée par chacun d'entre eux.



7. Calculer la fonction de transfert pour le filtre 1. Donner sa fréquence de coupure, littéralement et numériquement.

Uniquement pour les filtres susceptibles de convenir, donner la fréquence caractéristique du filtre, et faire l'application numérique.

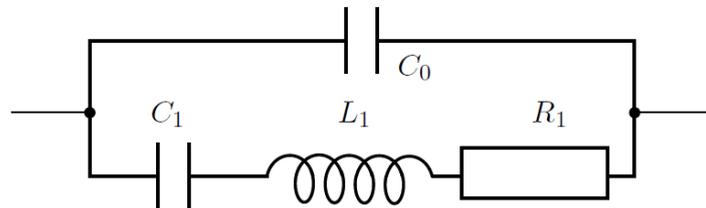
8. Conclusion : parmi les 6 filtres étudiés, quel est celui qui vous paraît le plus adapté à l'application d'altimétrie étudiée précédemment ?

Problème III : Horloge à Quartz (*X MP*)

Lorsqu'il est placé dans un champ électrique, un cristal de quartz convenablement taillé se déforme ; réciproquement, si un cristal de quartz est soumis à des efforts mécaniques, une différence de potentiel apparaît entre deux de ses faces. Ce couplage électromécanique, dit piézoélectrique, est à la base des horloges à quartz. Dans le cadre d'une application horlogère, l'application d'une tension variable aux bornes du composant va provoquer une vibration mécanique qui va conduire à l'apparition de charges et donc d'un courant. À une résonance mécanique du système est ainsi associée une résonance d'intensité. Un diviseur de fréquence permet enfin d'obtenir la fréquence de base de 1 Hz.

Un circuit équivalent au cristal de quartz est représenté sur la figure suivante. Le condensateur C_0 est la capacité du composant et les éléments C_1 , L_1 et R_1 sont les représentations sous forme d'une impédance électrique des effets piezoélectriques associés à la vibration du quartz. Les éléments et leurs valeurs sont notés de la même manière, par exemple la valeur de la capacité du condensateur C_0 est notée elle aussi C_0 .

On pose $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $Q = \frac{L_1 \omega_s}{R_1}$.



1. Adoptant les valeurs $C_1 = 3,00 \cdot 10^{-15}$ F, $L_1 = 7,86 \cdot 10^3$ H, $R_1 = 32 \cdot 10^3$ Ω et $C_0 = 1,50 \cdot 10^{-12}$ F, calculer $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $\omega_p = \omega_s \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}$, ainsi que les fréquences associées f_s et f_p .

Calculer également $Q = \frac{L_1 \omega_s}{R_1}$.

On commentera les valeurs obtenues.

2. Dans cette question uniquement, on considère que la résistance R_1 est nulle. Exprimer alors l'impédance complexe \underline{Z} du circuit sous la forme suivante :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_0 \omega_s x} \times \frac{1 - x^2}{a - x^2},$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_s}$ est la pulsation réduite et a un facteur sans dimension à exprimer en fonction de C_0 et C_1 .

Tracer l'allure de la réactance $X(x) = \text{Im}[\underline{Z}(x)]$. On donnera pour cela les limites en 0 et $+\infty$, et au voisinage de $x = a$.

Dans quel domaine de fréquences le quartz, dans ce modèle, se comporte-t-il comme un condensateur ? Comme une inductance ?

3. Au début des calculs de la question précédente menant à l'impédance complexe, par quelle fonction de L_1 et R_1 faut-il remplacer L_1 afin de décrire le circuit réel ?
4. Identifier et commenter les courbes de la figure suivante, qui représente les parties réelle et imaginaire de l'impédance complexe au voisinage de la fréquence de résonance parallèle ω_p .

On admettra les relations $Z(\omega_s) = \frac{R_1}{1 + \frac{j C_0}{Q C_1}}$ et $Z(\omega_p) \simeq \frac{C_1}{C_0} \frac{Q}{(C_1 + C_0)\omega_s} \simeq \frac{R_1}{(R_1 C_0 \omega_s)^2}$.

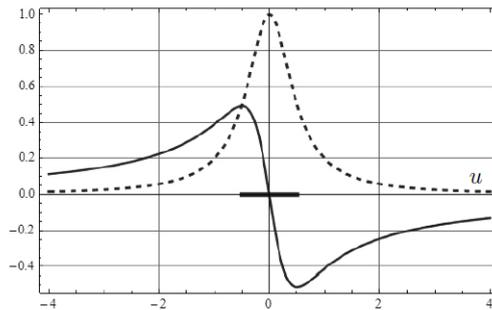


Figure 8 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance électrique du quartz au voisinage de la résonance parallèle. Les ordonnées sont normalisées au maximum de la courbe en pointillés, soit à $3,27 \times 10^8 \Omega = 327 \text{ M}\Omega$; en abscisse, $u = Q \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) = Q(x - a)$. La longueur réelle du trait épais sur l'axe des abscisses est $\frac{1}{Q}$.

5. La figure suivante représente $\log \left(\left| \frac{Z(x)}{Z(1)} \right| \right)$ en fonction de $\left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)$.

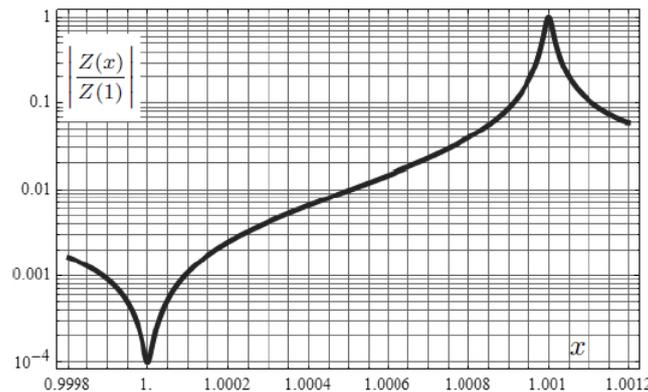


Figure 9 : Module de l'impédance équivalente du cristal de quartz utilisé.

Sachant que la tension u est imposée, quel est l'intérêt pratique d'opérer à la fréquence f_s ?

Justifier le choix de la valeur numérique particulière $f_s = 32768 \text{ Hz}$ pour la fréquence de travail des cristaux de quartz dans les montres.

6. Au voisinage de la température $T_0 = 300 \text{ K}$, la fréquence de résonance du quartz utilisé,

notée f_0 , varie en fonction de la température selon la loi

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = -4 \times 10^{-8} (T - T_0)^2.$$

Calculer la dérive d'une montre à quartz sur un an pour un écart $T - T_0$ constamment égal à 10 K. La montre avancera-t-elle ou reculera-t-elle ? (on justifiera la réponse)

