DM 2
Diffusion

À rendre le jeudi 01 octobre

Problème I : Le mouton *(CCP MP)*

« S'il vous plait… dessine-moi un mouton ! »

Le sujet s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11^e et le 9^e siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.

On appelle bélier le mâle adulte, brebis la femelle adulte, agneau le jeune mâle et agnelle la jeune femelle.

Comme tous les ruminants, leur système digestif complexe leur permet de transformer la cellulose de leur alimentation en acides gras volatils et en glucides simples. À la belle saison, ils se nourrissent dans les pâturages d'herbe broutée au ras du sol et on leur donne du foin en hiver.

Jusqu'à nos jours, le mouton est utilisé pour ses produits laitiers, sa viande, sa laine et son cuir, de façon artisanale ou semi-industrielle. Sa viande et son lait ont été les premières sources de protéines consommées par l'homme dans le passage de la chasse-cueillette à l'agriculture.

Données
– L'opérateur gradient d'une fonction A(M,t) en situation unidimensionnelle vaut en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{\mathrm{grad}(A(z,t))} = \dfrac{\partial A(z,t)}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$ et en coordonnées sphériques $\overrightarrow{\mathrm{grad}(A(r,t))} = \dfrac{\partial A(r,t)}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$.   – En coordonnées cartésiennes, l'opérateur divergence en situation unidimensionnelle vaut $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A(z)}\right) = \dfrac{dA(z)}{dz}$.

– On donne les potentiels standards des couples redox à 298 K :

Couple redox	produit d'oxydations des glucides /glucides	Cu^{2+}/Cu_2O	Fe^{3+}/Fe^{2+}	O_2/H_2O	MnO_4^-/Mn^{2+}
E^0 en volts	Ordre de grandeur – 0,2	0,04	0,77	1,23	1,51

– Sauf indications contraires, toutes les constantes d'équilibres chimiques en solutions aqueuses sont données à 298 K, température T à laquelle le produit ionique K_E de l'eau vaut 10^{-14} et la quantité $RT \cdot Ln(10) / F$ de la formule de Nernst vaut 0,06 $V \cdot mol^{-1}$.
F représente le Faraday, c'est-à-dire la charge d'une mole de charges élémentaires e.

– Masses molaires en $g \cdot mol^{-1}$:

hydrogène M(H) = 1,0	carbone M(C) = 12,0	oxygène M(O) = 16,0
chlore M(Cl) = 35,5	calcium M(Ca) = 40,0	cuivre M(Cu) = 63,5

– La constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31\ J \cdot K^{-1}\ mol^{-1}$.
– La charge élémentaire vaut $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.
– Le nombre d'Avogadro vaut $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$.

Partie I - La température du mouton

Document (*vigiferme.org*, pour le bien-être de l'animal et de l'éleveur, consulté en 2018)

Exposition à de basses températures
Les moutons sont naturellement adaptés pour supporter de très basses températures mais leur résistance au froid dépend de plusieurs facteurs : la race, l'âge, l'état du pelage…
Un mouton qui a une épaisse toison et qui est protégé de l'humidité pourra supporter des températures qui descendent en dessous de – 15 °C, un mouton tondu doit être protégé du froid. […] Lorsque le temps est humide, que les températures sont basses et qu'il y a du vent, la situation est critique pour les moutons. Le plus important est qu'ils ne soient pas mouillés jusqu'à la peau. La laine de certaines races, lorsqu'elle est épaisse, peut repousser l'humidité plusieurs jours. C'est le cas des races de montagne mais pour d'autres, à la laine très fine, le pelage est moins protecteur.
Les moutons qui ont froid se serrent les uns contre les autres.
Les agneaux nouveau-nés sont très sensibles aux basses températures, au vent et à l'humidité. Leur fine couche de laine et de graisse ne les protège que très peu. Les brebis prêtes à mettre bas doivent être isolées en bergerie et y rester au moins deux semaines après la naissance. Le taux de mortalité des agneaux qui viennent de naitre atteint plus de 25 % dans certains élevages. Ils succombent le plus souvent dans les heures qui suivent leur naissance par hypothermie plutôt que par maladie.

…/…

Exposition à de hautes températures
Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d'un coup de chaleur. Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondus, car la laine empêche la sueur de s'évaporer. C'est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

Cas de la brebis non tondue	Confort sans adaptation ou adaptation facile	Adaptation difficile	Adaptation très difficile	Inadaptation pouvant entraîner la mort
Température extérieure	de – 8 °C à 25 °C	de – 15 °C à – 8 °C et de 25 °C à 35 °C	de – 30 °C à – 15 °C et de 35 °C à 40 °C	en dessous de – 30 °C et au-dessus de 40 °C

La température d'un mouton en bonne santé se situe entre 38,5 et 39,5 °C.
Sa longueur moyenne va de 1 m à 1,50 m.
La tonte a lieu 1 à 2 fois par an produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Fin document

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintient sa température de consigne θ_{eq} = 39 °C et mieux comprendre les éléments du **document ci-dessus**.

I.1 - Propriétés de la toison de laine

La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s'enflamme à 600 °C), isolant phonique, absorbeur d'humidité, facile à teindre et 100 % biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d'une vingtaine d'acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l'eau qui font que la fibre s'enroule en frisures. Ces dernières enferment une grande quantité d'air, ce qui limite la conduction. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur d'eau mais hydrophobe pour l'eau liquide. L'adsorption d'eau (désorption d'eau) s'accompagne d'une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de 20 µm pour les moutons Mérinos à 40 µm pour les races écossaises.
Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine}. On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité thermique $\lambda_{laine} = 0{,}040\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Q1. La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température : $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}\ T}$.
Quelle est la dimension de la conductivité thermique λ ?

On considère un parallélépipède, de longueur L, de hauteur H et d'épaisseur e petite ($e << \min(L, H)$), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c (**figure 1**). Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépend que de la variable z et du temps t.

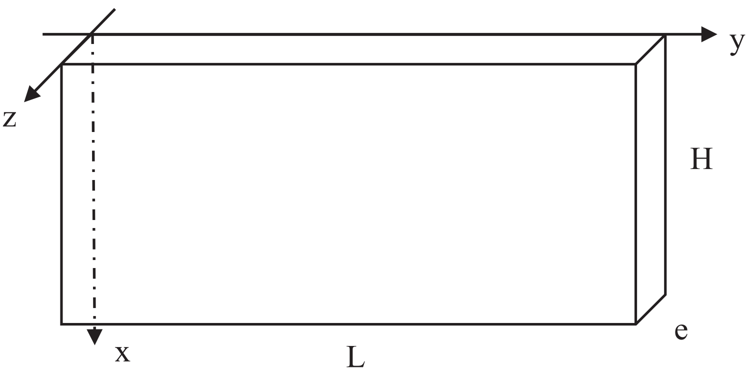

Figure 1 - Géométrie du conducteur thermique

Q2. Sur quelle direction est le vecteur densité $\overrightarrow{j_Q}$ de courant thermique ? De quelles variables dépend-il ?

Les températures, sauf avis contraire, sont en °C.

Q3. Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre z et z + dz et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la température T(z,t).

Q4. Que devient-elle en régime stationnaire ? Le vecteur $\overrightarrow{j_Q}$ dépend-il de z ?

Q5. On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{entrée}$ en $z = 0$ et T_{sortie} en $z = e$. Que vaut la puissance thermique φ qui traverse le matériau en fonction de e, λ, H, L, $T_{entrée}$ et T_{sortie} ?

Q6. Définir puis exprimer la résistance thermique du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (**figure 2**, page 6). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur e et de surface S séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique φ, engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures T_c, T_f des plaques chaude et froides sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

Q7. Exprimer l'expression de la conductivité λ_{laine} de l'échantillon en fonction de φ, e, S, T_c et T_f.

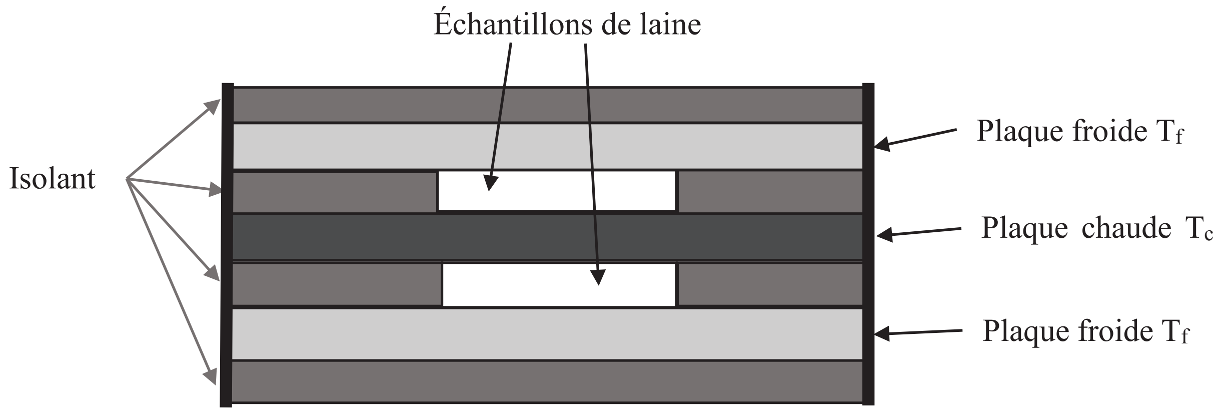

Figure 2 - Principe de la plaque chaude gardée

I.2 - Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plein, de température uniforme θ_{eq} = 39 °C, de longueur L = 100 cm et de section carrée de côté H = 30 cm. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de e = e_M = 10 cm de laine avant la tonte à e = e_m = 0,5 cm après la tonte. La situation est représentée en **figure 3** et en **figure 4** (page 7).

Q8. Exprimer la résistance R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de L, H, e et λ_{laine}. Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

Figure 3 - Modélisation de la brebis

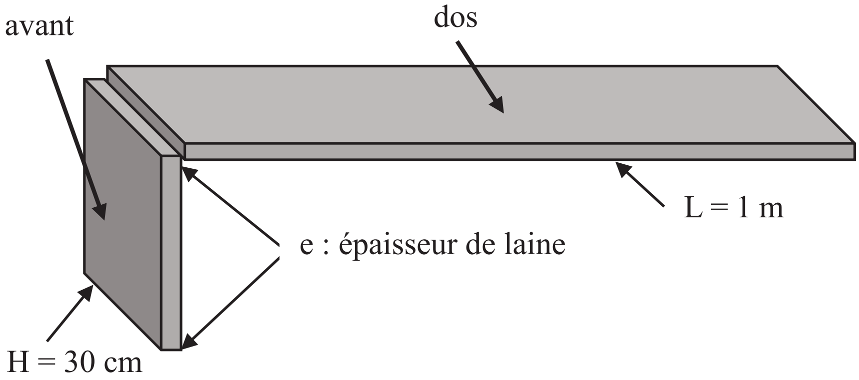

Figure 4 - Modélisation de la toison
Seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées.

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

Q9. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\overrightarrow{J_Q} = -\,h \cdot (T_{ext} - T_{air})\vec{n}$$

avec T_{ext} la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air} et le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ orienté de la brebis vers l'extérieur.
On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4{,}0\ Wm^{-2}K^{-1}$.
En déduire en fonction de h, L et H la résistance de conducto-convection R_{cc} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r. Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA(T_{ext} - T_{air})$$

avec A l'aire de la surface extérieure de la brebis, T_{ext} la température de cette surface en contact avec l'air de température T_{air}. La constante K a pour valeur $K = 5{,}0\ Wm^{-2}K^{-1}$.

Q10. Exprimer la résistance thermique de rayonnement R_r en fonction de K, L et H.

Q11. Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis $T_{int} = \theta_{eq} = 39$ °C et la température de l'air T_{air}. Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5$ °C.
En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation.
La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires <u>en toute situation</u> :

$$\dot{m} = 5{,}8 \cdot 10^{-6}\ g \cdot s^{-1}.$$

Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue :

$$\dot{m}' = 2\dot{m}$$

et que la température extérieure est supérieure à 5,1 °C.

L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau, supposée indépendante de la température, vaut $\Delta H^0{}_{vap} = 2\,500\ \text{kJ·kg}^{-1}$.

Q12. En déduire la puissance p_{m0} apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de $\dot{m}$, L, R_1, T_{int} et T_{air}, puis on en fera l'évaluation numérique pour $T_{air} = T_0 = 5$ °C.

Q13. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5$ °C.

I.3 - Déséquilibre thermique d'une brebis (situations de stress et de danger)

La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique) et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse).
Dans une situation où l'air environnemental est en dehors de la zone de confort, la brebis va se réchauffer ou se refroidir et éventuellement transpirer. On négligera la capacité thermique de la toison devant celle du corps de la brebis. On assimile la brebis à un volume d'eau de masse volumique $\mu = 1\,000\ \text{kg·m}^{-3}$ et de capacité thermique massique $c = 4\,200\ \text{J·K}^{-1}\text{·kg}^{-1}$. On admet que les variations de température sont suffisamment lentes pour utiliser les notions de résistances. On note p_m la puissance apportée par le métabolisme.

Q14. a) En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la <u>brebis non tondue</u> dans une situation (1) où la température T_{air} de l'environnement est différente de $T_0 = 5$ °C, montrer que l'équation différentielle relative à la température T(t) de la brebis s'écrit :

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_1}\left(T(t) - T_{air}\right) = \frac{(T_1 - T_{air})}{\tau_1}\ .$$

On exprimera τ_1 en fonction de μ, c, L, H, R_1 et $(T_1 - T_{air})$ en fonction de θ_{eq}, T_0, R_1 et $(p_m - p_{m0})$.

b) Exprimer la température T(t) en fonction de t, T_1, τ_1 et θ_{eq} en supposant que la température initiale de la brebis est $T(t = 0) = \theta_{eq}$.

c) Calculer τ_1. Calculer T_1 en °C pour $p_m = p_{m0}$ avec une température d'environnement égale à $T_{air} = 17$ °C.

Q15. D'après les données du **document** (pages 2 et 3), la <u>brebis non tondue</u> reste dans sa zone d'adaptation pour une température extérieure variant de – 8 °C à + 15 °C. En déduire entre quelles limites peut varier la puissance apportée par le métabolisme de l'animal dans cette situation (1) sans qu'il y ait danger pour lui. On suppose donc que la brebis reste à sa température d'équilibre $\theta_{eq} = 39$ °C.

Q16. En appliquant le premier principe à la <u>brebis tondue</u> dans une situation (2) où la température T_{air} de l'environnement est supérieure à $T_0 = 278$ K = 5 °C, montrer que l'équation différentielle relative à la température T(t) de la brebis peut se mettre sous la forme

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_2}\left(T(t) - T_{air}\right) = \frac{(T_2 - T_{air})}{\tau_2}$$

dans laquelle les notations T_2 et τ_2 sont des constantes à déterminer.
Exprimer τ_2/τ_1. Commenter.
En supposant que la possibilité de variation de la puissance métabolique soit celle obtenue à la question **Q15**, jusqu'à quelle température extérieure la brebis tondue peut-elle s'adapter à la chaleur ?

Q17. Faire un schéma de montage électrique équivalent aux situations (1) et (2) en indiquant les valeurs des éléments du montage en fonction de T_1, T_2, τ_1 et τ_2, R_1 et R_2.
Tracer l'allure de T(t) dans une situations de type (1) (brebis non tondue) à partir d'une température initiale $T(t = 0) = \theta_{eq} = 39$ °C avec $p_m = p_{mo}$ et une température de l'air égale à 17 °C.
Tracer l'allure de T(t) pour la situation (2) (brebis tondue) à partir d'une température initiale $T(t = 0) = \theta_{eq} = 39$ °C et une température de l'air égale à 25 °C sachant que la valeur de $T_2 - T_{air}$ vaut 2,6 °C.

Pour assurer leur survie, il leur faut une alimentation suffisante en sources de glucides. Ce sont les réactions chimiques issues du glucose qui fournissent l'énergie du métabolisme. Les réactions d'oxydation du glucose $C_6H_{12}O_6$ par le dioxygène respiré formant de l'eau et du dioxyde de carbone sont les sources d'énergie thermique.

Q18. Écrire le bilan chimique pour une mole de glucose. Sachant que cette réaction est caractérisée par une enthalpie standard de réaction égale à $\Delta_r^0H = -2\,800$ kJ·mol^{-1}, quelle est l'énergie thermique apportée par litre de dioxygène respiré (pris à 5 °C à la pression de 1 bar) ?
En utilisant les résultats de la question **Q12** (page 8), quelle quantité d'oxygène la brebis doit-elle respirer par minute en situation de confort ?

I.4 - Réponse d'un groupe de brebis

Les brebis se serrent les unes contre les autres en situation de stress thermique dû au froid extérieur. Supposons que le berger ait un troupeau de 6 brebis non tondues. Plusieurs regroupements sont possibles comme indiqué en **figure 5**.

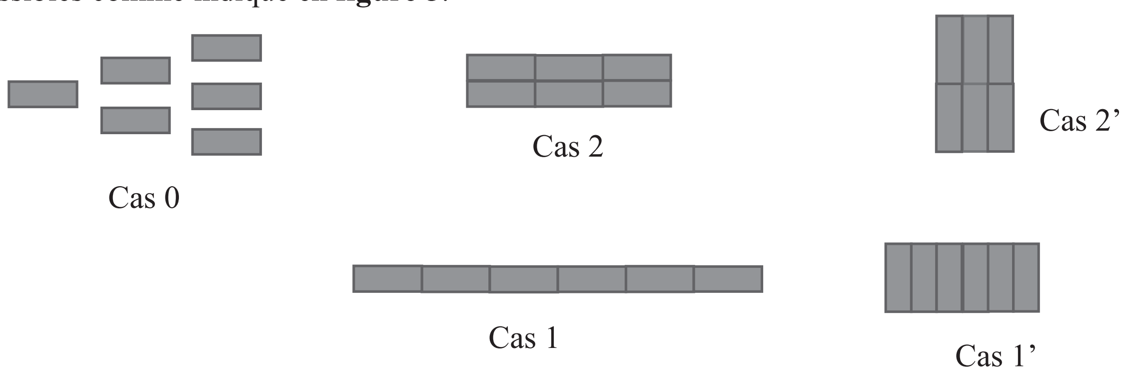

Figure 5 - Regroupements possibles de 6 brebis

Q19. Évaluer la diminution de surface en contact avec l'air par rapport aux brebis isolées dans les cas 1, 1', 2 et 2' en fonction de H et X = L/H = 3,3 (Longueur L et section carrée de côté H telles que définies dans la **figure 4**, page 7). Quel sera le cas de plus faible conductance thermique ? Dans quelle configuration les brebis ont-elles intérêt à se regrouper ? Quelle sera la diminution relative moyenne de métabolisme nécessaire au maintien de la température interne induite par le regroupement ? Certaines ont-elles intérêt à changer de place de temps en temps ?

Problème II : Diffusion des bulles de champagne *(Centrale PC)*

On envisage une bulle de champagne unique, sphérique de centre B fixe et de rayon variable $a(t)$ contenant $N_g(t)$ molécules de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait ; on note $C_g(t)$ le nombre, supposé uniforme, de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume dans cette bulle. On repère un point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre B.
Le champagne liquide occupe le reste de l'espace et on y note $C(r,t)$ le nombre volumique de molécules de dioxyde de carbone, supposé indépendant de θ et φ.

On néglige les phénomènes de tension superficielle et la pesanteur, de telle sorte que la pression p est uniforme dans tout le système, avec la même valeur dans la phase gazeuse et dans la phase liquide. L'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution aqueuse qui l'entoure dans une bouteille fermée où la pression initiale vaut $p = p_i$ impose la relation $C = \dfrac{\xi p_i}{k_B T}$ entre le nombre volumique de molécules C dans la phase liquide et la pression p_i dans la phase gazeuse ; ξ ne dépend que de la température (c'est donc une constante) ; k_B est la constante de Boltzmann.

Lorsqu'on ouvre la bouteille de champagne, la pression chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique $p = p_e$ avec $p_e < p_i$. La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution ; elle s'écrit $C(r = a, t) = \dfrac{\xi p_e}{k_B T}$. Loin de la bulle, on suppose qu'on a toujours $C(r = \infty, t) = \dfrac{\xi p_i}{k_B T}$. Ainsi $C(r,t)$ n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution : on note $\overrightarrow{j} = j(r,t\overrightarrow{u_r}$ le vecteur densité de flux de particules ; il satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

1. Soit une couronne de champagne liquide, comprise entre les rayons r et $r + dr$. Exprimer le nombre $\delta^2 N_e$ de molécules de dioxyde de carbone qui entrent dans cette couronne entre les instants t et $t + dt$ en fonction de $\dfrac{\partial(r^2 j)}{\partial^r}$, dr et dt.
2. On se place en régime stationnaire. En déduire que $C(r)$ est de la forme $C(r) = \alpha + \dfrac{\beta}{r}$ où α et β sont deux constantes.
3. Bien que le régime réel ne soit pas stationnaire puisque le rayon a dépend du temps, on utilise la forme de $C(r)$ ci-dessus avec $a(t)$. Exprimer α et β en fonction de $a(t)$, ξ, p_i, p_e , k_B et T.
4. En déduire le taux de variation $\dfrac{dN_g}{dt}$ du nombre N_g de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle de gaz en fonction de D , a, ξ, p_i , p_e , k_B et T.
5. Montrer que $a(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :
$$a(t)\dot{a}(t) = K$$
où K est une constante qu'on exprimera en fonction de p_e , p_i, ξ et D. Vérifier l'homogénéité de l'équation précédente.
6. En déduire l'expression de $a(t)$. Lors de la croissance de la bulle à la surface du verre sur son site de naissance pour $p_e = 1\ bar$ et $p_i = 3\ bar$, le rayon des bulles croît de $a_0 \simeq 10^{-6}\ m$ jusqu'à $a_1 \simeq 10^{-5}\ m$. Vérifier que dans ces conditions on a $K \simeq 4.10^{-9}\ m^2.s^1$ sachant que $D \simeq 3.10^{-9}\ m^2.s^1$ et $\xi \simeq 0,7$. Évaluer la durée τ_1 de cette phase.