TD4

Diffusion thermique

Questions de cours

- Citer et expliquer les 3 modes de transfert thermique.
- Comment est défini $\overrightarrow{j_Q}$? A quoi est-il homogène ?
- Comment s'écrit le flux thermique ?
- Donner la loi de Fourier.
- Donner l'ordre de grandeur de la conductivité thermique d'un bon et d'un mauvais conducteur.
- Faire le bilan thermique en cartésien et en déduire l'équation locale de bilan thermique.
- Démontrer l'équation de le chaleur.
- Que pouvez vous dire des échelles caractéristiques de variation de la température.
- Donner la loi de Newton pour la convection.
- Définir la résistance thermique.
- Quelle est son expression en 1D cartésien ?
- Comment s'ajoute les résistances thermique en série ou en parallèle ?
- Définir un corps noir.
- Qu'est-ce que l'albédo ?

Applications du cours

Exercice 1 - Équation de diffusion unidimensionnelle sphérique - ♥♥♥ / ★

On considère un matériaux sphérique de rayon R. On suppose que la diffusion dans la sphère est seulement radiale c'est à dire $n(M,t) = n(r,t)$ en coordonnées sphériques. On suppose qu'il n'y a ni création ni disparition de particules dans le milieu.

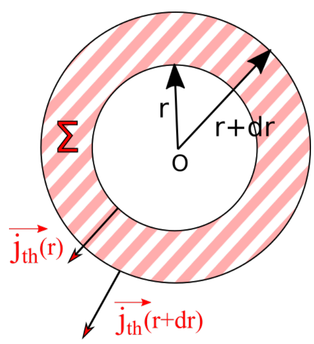


FIGURE 1 : Diffusion radiale

1. Déterminer l'expression simplifiée de $\overrightarrow{j_N}(M,t)$
2. Effectuer un bilan de matière entre deux sphères de rayon r et $r+dr$. En déduire l'équation de conservation de la matière dans le matériaux.
3. En déduire l'équation de la diffusion.
4. Vérifier à l'aide de l'expression du laplacien scalaire donné en annexe du cours que l'équation trouvée précédemment correspond bien.

Exercice 2 - Vie quotidienne : cuisson d'un oeuf ; paroi d'un igloo - ♥♥ / ★★

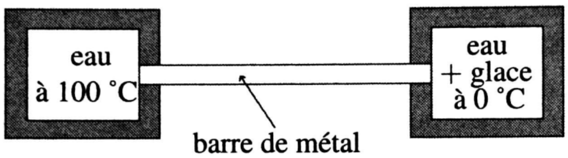
1. La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure environ 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 g et 63 g.

   Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, de masse comprise entre $1,2$ kg et $1,8$ kg ?
2. Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs d'un igloo, contenant un seul habitant, si la température extérieure est de $-20°C$?

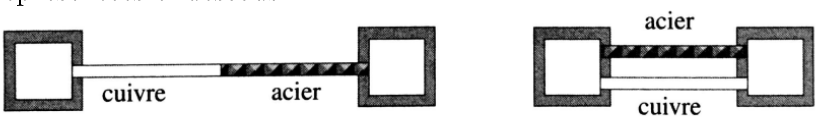
   On prendra la conductivité thermique de la glace égale à $\lambda = 0,05\ W.m^{-1}.K^{-1}$. La température minimale à la survie sera prise égale à $10°C$ et on considérera que le métabolisme de l'occupant dégage une puissance $\mathcal{P} = 50\ W$.

Exercice 3 - Association de résistances thermiques - ♥ / ★

On considère le dispositif schématisé sur la figure suivante :



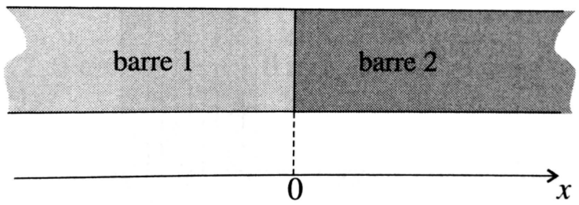
Les parois sont adiabatiques. Si la barre de métal est en cuivre, la glace fond en 20 minutes. Si elle est en acier, elle fond en 40 minutes. En combien de temps fond la glace dans les deux configurations représentées ci-dessous ?



Approfondissement

Exercice 4 - Sensation de froid et de chaud - ♥♥ / ★★

Deux barres de très grande longueur et de même section S ont des conductivités thermiques λ_1 et λ_2, des masses volumiques μ_1 et μ_2 et des capacités thermiques massiques c_1 et c_2. Ces deux barres, initialement de températures uniformes T_1 et T_2, sont mises en contact en $x = 0$ à l'instant $t = 0$. Leurs surfaces latérales sont parfaitement calorifugées.



1. Écrire l'équation de diffusion thermique pour $x < 0$ et pour $x > 0$. Donner les expressions des diffusivités thermiques D_1 et D_2 des deux barres.
2. On admet que la fonction $f_D(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} \exp(-u^2)\mathrm{d}u$ est solution de l'équation de diffusion thermique (D étant la diffusivité thermique) et que $\lim_{x\to\pm\infty} f_D(x,t) = \pm 1$.
   Vérifier que $f_D(0,t) = 0$ et que $\frac{\partial f_D}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}$.
3. En cherchant le champ de température sous la forme $T_1(x,t) = A_1 + B_1 f_{D_1}(x,t)$ pour $x < 0$ et $T_2(x,t) = A_2 + B_2 f_{D_2}(x,t)$ pour $x > 0$, déterminer la température T_J à la jonction des deux barres.
   Exprimer T_J en fonction de T_1, T_2, et des *effusivités thermiques* des deux barres, définies par $E_1 = \sqrt{\mu_1 c_1 \lambda_1}$ et $E_2 = \sqrt{\mu_2 c_2 \lambda_2}$.
4. Calculer la température de contact entre la main ($T_{\text{main}} = 37°C$) et un objet de température $T_{\text{objet}} = 20°C$ lorsque cet objet est en bois ou en acier.
   On donne $E_{\text{main}} = 1,80.10^3\ u_{SI}$, $E_{\text{bois}} = 0,40.10^3\ u_{SI}$, et $E_{\text{acier}} = 14,0.10^3\ u_{SI}$. Commenter.

Exercice 5 - Age de la Terre selon Lord Kelvin - ♥ / ★★

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace $z > 0$. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z (comptée positivement vers le bas) et du temps t. La planète a une conductivité thermique λ, une masse volumique ρ et une capacité thermique massique c, toutes trois uniformes. On note $j_{\text{th}}(z,t)$ la densité de courant thermique.

1. Montrer que $\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_{\text{th}}}{\partial z^2}$ (E1) où $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ est la diffusivité thermique.

Au milieu du XIXème siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément sa surface a été soumise à une température T_S. Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ?
   Quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ?
3. Lord Kelvin proposa la solution : $j_{\text{th}}(z,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$, où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre. On **admet** qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation (E1). Vérifier qu'elle est compatible avec la condition initiale et avec les conditions aux limites.
   Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

4. On suppose que $A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c^\delta$, où a est un facteur numérique et où α, β, γ et δ sont des exposants éventuellement nuls.

   Calculer α, β, γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.

5. On peut montrer que $a = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\dfrac{\partial T}{\partial z}$.

   Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 K à 2000 K et que D est proche de 1.10^{-6} $m^2.s^{-1}$. L'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de 30 $K.km^{-1}$.

   Quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?

6. Que pensez-vous de cette estimation ? Quel est (ou quels sont) l'(es) ingrédient(s) physique(s) que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ? Pourquoi l'a-t-il fait ?

   Que penser de la modélisation par une Terre plate ?

Élements de réponse

1. Utiliser les calculs du TD3 en cylindrique.
2. 1) $\tau_{\text{autruche}} \simeq 26\ min$
   2) $e \simeq 14\ cm$
3. $R_{Cu} = \dfrac{1}{2} R_{\text{acier}}$; $R_{\text{série}} = \dfrac{3}{2} R_{Cu}$ (1 heure) ; $R_{\text{parralèle}} = \dfrac{2}{3} R_{Cu}$ (13 minutes).
4. 1) pour $x < 0$: $\dfrac{1}{D_1}\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

      pour $x > 0$: $\dfrac{1}{D_2}\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

   3) $T_J = \dfrac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$.
   4) Contact avec le bois : $T_J = 33,9°C$; contact avec l'acier : $T_J = 21,9°C$.
5. 2) $\lim_{t\to\infty} j_{\text{th}}(0,t) = 0$; $\lim_{t\to 0} j_{\text{th}}(0,t) = \infty$; lorsque $z \neq 0$, la densité de courant thermique est nulle à $t = 0$ et $t \to \infty$.
   4) $A = a(T_0 - T_S)\lambda$.
   5) Entre 11 et 45 millions d'années.
   6) Il manque la radioactivité de la croûte terrestre, découverte après ces travaux. La Terre **est** plate enfin, on vous l'a pourtant assez répété !