
DS 2+

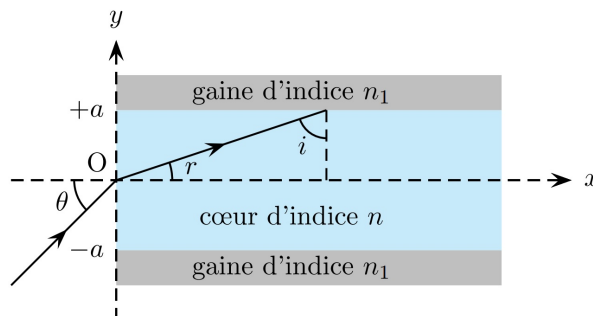
Diffusion et optique

Vendredi 09 octobre 2020

Problème I : Fibre optique à saut d'indice (*Mines PC*)

Une fibre optique à saut d'indice, représentée ci-dessous, est formée d'un cœur cylindrique d'axe Ox , de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents.

Un rayon situé dans le plan xOy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ . Avant son entrée dans la fibre, le rayon lumineux est dans l'air.

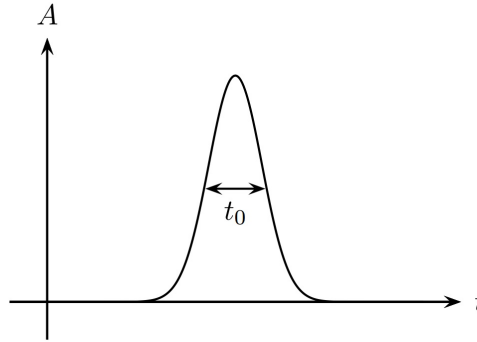


Les rayons lumineux sont supposés issus d'une source monochromatique de fréquence ν . La longueur d'onde dans le cœur est notée λ .

1. À quelle condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il à l'intérieur du cœur ? On note i_ℓ l'angle d'incidence limite.
2. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_ℓ dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_ℓ . En déduire que l'expression de l'ouverture numérique $ON = \sin \theta_\ell$ de la fibre peut s'écrire $ON = \sqrt{n^2 - n_1^2}$.
3. Donner la valeur numérique de ON pour $n = 1,500$ et $n_1 = 1,470$.

On considère une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_ℓ . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

4. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L , c , n et n_1 .
5. On pose $2\Delta = 1 - \frac{n_1^2}{n^2}$, avec $\Delta \ll 1$ pour les fibres optiques. Donner dans ce cas l'expression approchée de δt en fonction de L , c , n et Δ . On conservera cette expression de δt dans la suite.



On envoie à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée t_0 formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_ℓ . La figure ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t .

6. Reproduire la figure ci-dessus en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle durée t'_0 a approximativement l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ? Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (ou "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F .
7. En supposant t_0 négligeable devant δt , quelle est la condition sur la fréquence d'émission F qu'il faut respecter pour que les impulsions ne se recouvrent pas à la sortie de la fibre optique ?

Soit $L_{\max}$ la longueur maximale de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{\max} \cdot F$.

8. Exprimer la bande passante B en fonction de c , n et Δ .
9. Calculer la valeur numérique de Δ et de la bande passante B (exprimée en $\text{MHz} \cdot \text{km}$) avec les valeurs de n et n_1 données dans la question 3 . Pour un débit d'information de $F = 100 \text{ Mbits} \cdot \text{s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de $L_{\max}$ obtenue.

Problème II : Température dans le tunnel de Frejus (*Mines PC*)

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation $\underline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple $\vec{j}$ pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple $\hat{e}_z$ tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

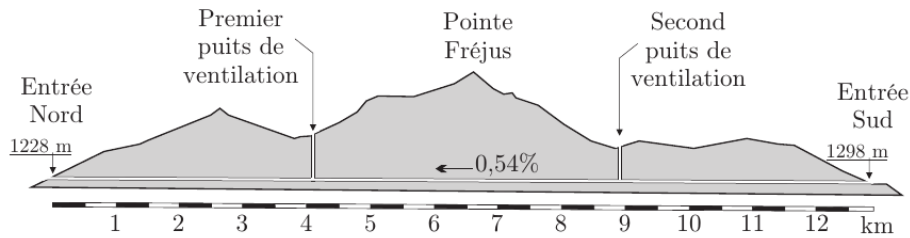


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

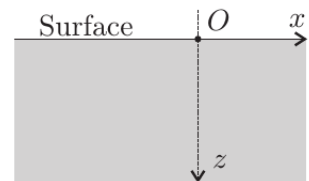


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ \text{C}$. (Voir figure 2).

- 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.
- 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire $d\mathcal{S}$ pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .
- 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface $\mathcal{S}$. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et $\mathcal{S}$ puis en fonction de ρ_s , c_s , $\mathcal{S}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $T(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de k qu'on mettra sous la forme $k = k' + i k''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

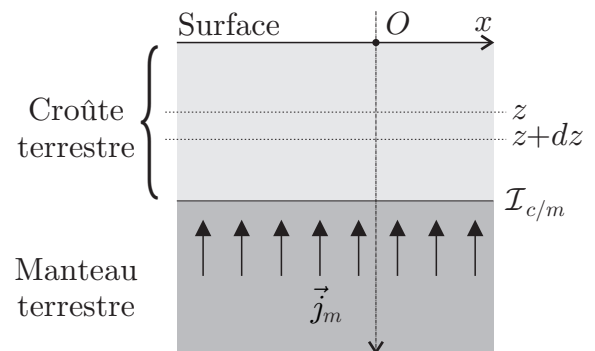


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface $\mathcal{S}$, comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H , L_c , $\mathcal{P}$, j_m , κ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10,0$ km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

□ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x, z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.

Déterminer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S . En déduire que que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1 , c_2 , c_3 et δ en fonction des données du problème.

Problème III : Décantation des boues (*Centrale PC*)

Cette partie s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein du décanteur primaire, sous l'action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon $r \leq 1 \mu\text{m}$ et de densité d . On note $n^*(z, t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules·m⁻³.

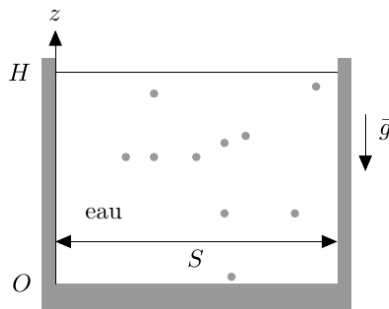


Figure 9 Particules en suspension dans un bac décanteur

III.A – Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $H = 2$ m et de section S .

III.A.1) On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules n^* au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

a) La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules $\vec{j}_D$. De la même façon que la diffusion thermique dans un milieu se traduit par un flux thermique $\vec{j}_Q$ proportionnel et opposé au gradient de température $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ (loi de Fourier), la diffusion de particules se traduit par un flux de particules

proportionnel et opposé au gradient de concentration, soit ici $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^*$. La constante D est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

Exprimer $\vec{j}_D$ en fonction de D , $\frac{\partial n^*}{\partial z}$ et d'un vecteur unitaire.

b) En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse v_ℓ . Déterminer l'expression du flux de particules $\vec{j}_C$ associé à la convection, en fonction de $n^*(z, t)$ et v_ℓ . En déduire le flux total de particules $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_C$.

c) Montrer que l'évolution de $n^*(z, t)$ est régie par l'équation de Mason-Weaver :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}$$

III.A.2) On cherche le profil de concentration $n_\infty^*(z)$ en régime stationnaire.

a) Donner la forme de la solution générale pour $n_\infty^*(z)$, en introduisant une longueur caractéristique λ . Écrire la condition limite pour le flux total $\vec{j}$ en $z = 0$, et en déduire la nouvelle forme de $n_\infty^*(z)$, que l'on exprimera en fonction de $n_0^* = n_\infty^*(z = 0)$, λ et z .

b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement de la force de Stokes :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

Montrer que la répartition des particules $n_\infty^*(z)$ peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, $n_\infty^*(z)$ est proportionnelle au facteur $\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$, e_p étant l'énergie potentielle associée à une particule et k_B la constante de Boltzmann.

On admettra que la vitesse limite $v_l = \frac{m^* g}{6\pi\eta r}$ avec $m^* = m_{\text{particule}}(1 - \frac{1}{d})$, la masse apparente de la particule.

On donne : $\rho_{\text{particule}} = 2,65.10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{\text{eau}} = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

c) Pour $T = 300 \text{ K}$, estimer numériquement λ pour $r = 1 \mu\text{m}$, $r = 0,1 \mu\text{m}$ et $r = 0,01 \mu\text{m}$. Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

III.B – Sédimentation d'une suspension concentrée

On néglige les effets diffusifs. À concentration élevée, la vitesse de sédimentation v_ℓ décroît avec la densité volumique de la boue. Ce phénomène est décrit par la loi empirique de Richardson-Zaki : $v_\ell(x) = v_0(1 - x)^n$ où x est la fraction volumique en particules solides dans la boue, v_0 une constante et $n \simeq 5,1$.

III.B.1)

a) Relier $x(z, t)$ à la densité volumique en particules solides $n^*(z, t)$ et au volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ d'une particule solide. Tracer l'allure de la courbe $v_\ell = f(n^*)$.

b) Que représente la constante v_0 ? Quelle est la conséquence pour le mouvement macroscopique de l'eau de la chute d'un grand nombre de sédiments ? Expliquer alors qualitativement pourquoi v_ℓ décroît lorsque la concentration en particules augmente.

III.B.2) On note le flux de particules $\vec{j}$ (qui s'assimile au flux convectif $\vec{j}_C$ déterminé à la question III.A.1). Les particules se déplaçant uniquement vers le bas, on note $\vec{j} = -j(z, t)\vec{u}_z$.

Déterminer $j(z, t)$ en fonction de v_0 , V , n et $n^*(z, t)$.

En vous aidant de la courbe de la figure 10, déterminer la valeur maximale j_{max} du flux de particules, en fonction de v_0 et V .

Que représente la pente du segment OM ?

III.B.3) Une suspension initialement homogène de densité volumique n_0^* laissée à décanter présente rapidement trois zones distinctes : une zone transparente (1) en haut du décanteur, une zone opaque (3) en bas, et une zone trouble (2) qui les sépare (voir figure 11).

- a) En vous aidant de la figure 10, déterminer la valeur de n^* dans chacune de ces trois zones.
b) Par un bilan de particules entre les instants t et $t + dt$, montrer que la vitesse de déplacement $\vec{v}_F$ d'une frontière séparant deux zones de densités volumiques de particules respectives n_-^* et n_+^* (voir figure 11) s'écrit :

$$\vec{v}_F = -\frac{j(n_+^*) - j(n_-^*)}{n_+^* - n_-^*} \vec{u}_z$$

- c) La frontière entre (1) et (2) se déplace à une vitesse $\vec{v}_{12}$. Déterminer $\vec{v}_{12}$ pour une fraction volumique $x = 10\%$ en sédiments, en fonction de v_0 .
d) La frontière entre (2) et (3) se déplace à une vitesse $\vec{v}_{23}$. Déterminer $\vec{v}_{23}$ en fonction de v_0 .

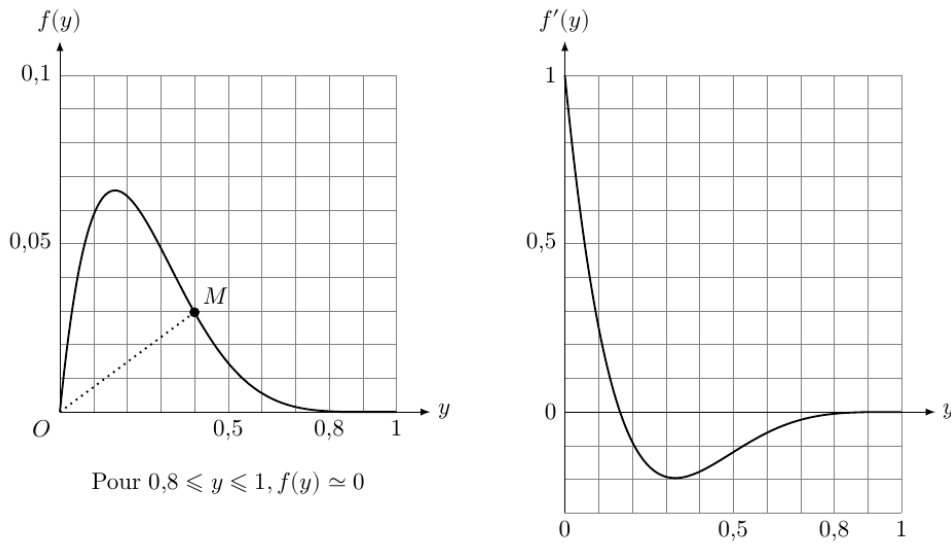


Figure 10 Tracé de la fonction $f(y) = y(1-y)^{5,1}$ et de sa dérivée



Figure 11 Décantation d'une suspension

III.B.4) On cherche à comprendre pourquoi de tels fronts de variation brusque de la concentration apparaissent quel que soit le profil initial de la concentration dans le décanteur.

- a) On note $\vec{v}_{\text{iso}} = v_{\text{iso}} \vec{u}_z$ la vitesse de déplacement d'une surface horizontale de densité volumique n^* fixée. Relier v_{iso} à $\frac{dj}{dn^*}$, puis tracer l'allure de $v_{\text{iso}}(n^*)$.

- b) En déduire comment, à partir d'une suspension où la fraction volumique varie linéairement de 0 en surface à 0,80 au fond du décanteur, un front où la concentration varie brutalement peut se former dans le décanteur. On pourra représenter l'allure de l'évolution de $n^*(z, t)$ au cours du temps.

Donnée : Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

