DM 2
Diffusion

Correction

CCP MP 2018 φX

I La température du mouton

I1 Propriété de la toison de laine

Q1 $\vec{j_Q} = -\lambda\, \vec{\text{grad}}\, T$ $\qquad [\Phi] = [\vec{j_Q}].[d\vec{S}]$

$\Rightarrow [\vec{j_Q}] = \frac{[\Phi]}{L^2}$ $\quad$ et $[\Phi]$ = Puissance = $[\vec{F}][\vec{v}]$

$\Rightarrow [\Phi] = M.\frac{L^2}{t^3}$

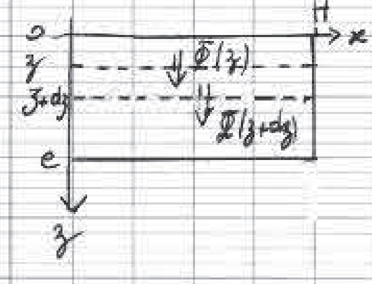
$$[\lambda] = \frac{[j_Q]}{[\text{grad}\, T]} \Rightarrow \boxed{[\lambda] = \frac{[\Phi]}{L^2 \frac{T}{L}} = \frac{P}{TL} = \frac{ML}{Tt^3}}$$

Q2 Par définition $\vec{j_Q} = -\lambda\, \vec{\text{grad}}\, T$ et $T(M,t) = T(z,t)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j_Q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u_z}}$$

$\vec{j_Q}$ dépend de z et t et est porté par l'axe (Oz)

Q3



Système S : tranche de matériau comprise entre z et $z+dz$

1er principe :

$$U(S(t+dt)) - U(S(t)) = \delta Q^{cd} + \underbrace{\delta W}_{0}\ \text{incompressible.}$$

$$\Rightarrow c\mu HL dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = (\Phi(z) - \Phi(z+dz))\, dt \Rightarrow c\mu HL \cancel{dz} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \cancel{dz} \quad (1)$$

Notons que $\Phi(z) = \iint_{S=HL} \vec{j_Q}(z).d\vec{S} = \int_{x=0}^{H}\int_{y=0}^{L} j_Q(z,t)\,.dx\,dy \Rightarrow \Phi(z) = -\lambda.\frac{\partial T}{\partial z}.HL$

Ainsi : (1) $\Leftrightarrow c\mu \cancel{HL}.\frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \cancel{HL}.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

Q4 En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow T = Az + B$.

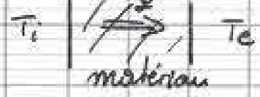
et $\frac{\partial T}{\partial z} = A$.

$\vec{j_Q} = -\lambda.\frac{\partial T}{\partial z}\vec{u_z} = -\lambda A \vec{u_z}$ $\quad$ ainsi $\vec{j_Q}$ est un vecteur cst.

Q5 Cdt° aux limites : $\begin{cases} T(0) = T_{entrée} = B \\ T(e) = T_{sortie} = Ae + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = T_{entrée} \\ A = \frac{T_{sortie} - T_{entrée}}{e} \end{cases}$

$$\boxed{T(z) = \frac{T_{sortie} - T_{entrée}}{e} z + T_{entrée}}$$

$$\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} HL \Rightarrow \boxed{\Phi = +\lambda HL \cdot \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{e}}$$

Q6 

En régime permanent le flux thermique est proportionnel à $T_i - T_e$.

$$T_i - T_e = R_{th} \cdot \Phi_{th}$$

Dans notre cas :

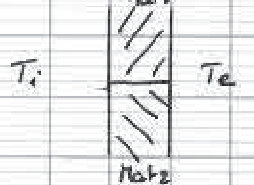
$$R_{th} = \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{\Phi} \Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda HL}}$$

→ Résistance thermique en série

Lorsque l'on superpose 2 matériaux entre T_i et T_e, ils seront traversés par le même flux thermique. Le schéma électrique équivalent :

$$\boxed{T_i - T_e = (R_1 + R_2)\ \Phi} \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$$

→ Résistance thermique en parallèle



Les 2 matériaux ne sont pas traversés par le même flux thermique. Par contre ils sont soumis à la même différence de températures

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_i - T_e = R_1 \Phi_1 \\ T_i - T_e = R_2 \Phi_2 \end{array}\right\} \text{ et } \Phi_{tot} = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Q7 $R = \frac{T_c - T_f}{\varphi} = \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow \boxed{\lambda_{eau} = \frac{e\varphi}{(T_c - T_f)S}}$

I2 Équilibre thermique d'une brebis

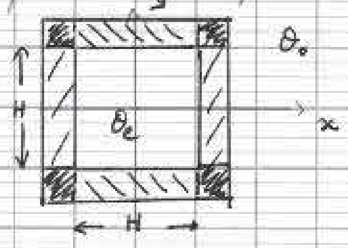
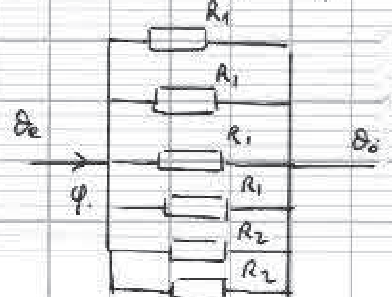
Q8 

schéma électrique équivalent :



$$R_1 = \frac{e}{\lambda_{laine} HL}$$

$$R_2 = \frac{e}{\lambda_{laine} H^2}$$

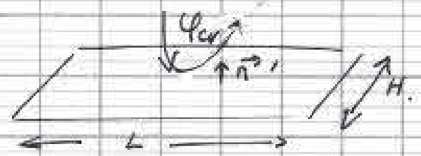
$R_{diff} = \left(\frac{4}{R_1} + \frac{2}{R_2} \right)^{-1}$ => $\boxed{R_{diff} = \frac{e}{2\lambda H (2L+H)}}$

→ $e = e_n$. $R_{diff} = 1,8 \, W^{-1}K$

→ $e = e_m$ $R_{diff} = 9.10^{-2} \, W^{-1}K$

Q9 loi de Newton :

$\vec{j_q} = - h (T_{ext} - T_{air}) \vec{n}$



$\varphi^{cv}_{tot} = \iint_{S_{tot}} \vec{j_q} \, \vec{n}' \, dS$

$\varphi^{cv}_{tot} = + h (T_{ext} - T_{air}) . S_{tot}$.

En sachant que nous avons 4 surfaces $S = LH$ et 2 surfaces $S' = H^2$

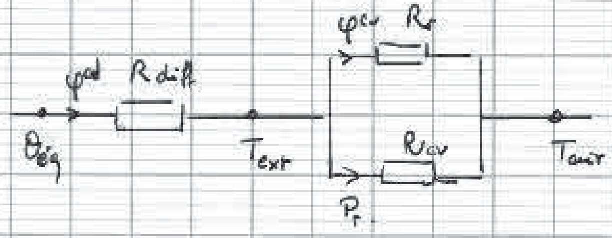
$\varphi^{cv}_{tot} = h (T_{ext} - T_{air}) . (2H(2L+H))$

=> $\boxed{R^{cv} = \frac{1}{2Hh(2L+h)}}$ $R_{cv} = 0,17 \, W^{-1}.K$

Q10 $P_r = KA (T_{ext} - T_{air})$ $R_r = \frac{1}{P_r}$ => $\boxed{R_r = \frac{1}{KA} = \frac{1}{2KH(2L+H)}}$

$R_r = 0,145 \, W^{-1}.K$.

Q11



$\boxed{R = R_{diff} + \frac{R_{cv}.R_r}{R_{cv}+R_r}}$ $R_1 = 1,9 \, W^{-1}K$ et $R_2 = 0,17 \, W^{-1}.K$

Q12 Air : $T_0 = 5°C$

En confort climatique la brebis perd autant d'Energie, qu'elle en pdt.

→ perte thermique : $\varphi = \frac{\theta_{éq} - T_{air}}{R_1}$ et $\begin{cases} \theta_{éq} = T_{int} \\ T_{air} = T_0 \end{cases}$

→ perte par évaporation : $\varphi^{ev} = \dot{m} . \Delta H_{vap}$.

Il faut indiquer → comme ΔH_{vap}

Ainsi $\boxed{P_{m_0} = \frac{T_{int} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{vap}}$ pour une brebis tondue

AN $P_{m_0} = 18 \, W$.

Q13 Ainsi $\boxed{P_{m_0}' = \frac{T_{int} - T_0}{R_2} + \dot{m} \Delta H_{vap}}$ après la tonte pour $T_0 = 5°C$

$P_{m_0}' = 200 \, W$.

I3 Déséquilibre thermique d'une brebis

Q14a Système : Brebis non tondue (masse d'eau $m_b = \mu H^2 L$; $T(t)$)

1er principe appliqué à la brebis

$$H(S(t+dt)) - H(S(t)) = \delta Q^{th} + \delta Q^{ev} + \delta Q^{mét.}$$

$$\Rightarrow c\mu H^2 L \left(\frac{dT}{dt}\right) dt = \delta Q^{th} + \delta Q^{ev} + \delta Q^{mét.}$$

avec : $\rightarrow \delta Q^{th} = -\frac{T(t) - T_{air}}{R_1} dt$ perte thermique

$\rightarrow \delta Q^{ev} = ?$ perte par évaporat° d'après la question Q12

$$\delta Q^{ev} = -\dot{m}\,\Delta H_{vap}\, dt = -\left(P_{m_0} - \frac{\theta_{éq} - T_0}{R_1}\right) dt$$

$\rightarrow \delta Q^{métab.} = +P_m . dt$ apport par le métabolisme.

Bilan $c\mu H^2 L \frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_{air}}{R_1} - P_{m_0} + \frac{\theta_{éq} - T_0}{R_1} + P_m$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{R_1 c\mu H^2 L}(T - T_{air}) = \frac{1}{c\mu H^2 L}(P_m - P_{m_0}) + \frac{1}{R_1 c\mu H^2 L}(\theta_{éq} - T_0)}$$

par analogie : $\tau_1 = R_1 c\mu H^2 L$ et $T_1 - T_{air} = R_1(P_m - P_{m_0}) + (\theta_{éq} - T_0)$

Q14b Changement de variable $\theta = T - T_{air}$ $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$

l'Équation devient : $\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau_1}\theta = (T_1 - T_{air})\frac{1}{\tau_1}$

La solution $\theta = \theta_p + \theta_g$. $\rightarrow \theta_g$ solution générale de l'Équation homog

$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau_1}\theta = 0 \Rightarrow \theta_g = k e^{-t/\tau_1}$

$\rightarrow \theta_p$ solution particulière de l'Équation totale

$\frac{d\theta_p}{dt} = 0 \Rightarrow \theta_p = (T_1 - T_{air})$

Bilan : $\theta = T - T_{air} = T_1 - T_{air} + k e^{-t/\tau}$.

$\Rightarrow T(t) = T_1 + k e^{-t/\tau}$

Cdt° aux limites : $T(0) = \theta_{éq} = T_1 + k \Rightarrow k = -T_1 + \theta_{éq}$

$$\boxed{T(t) = T_1 + (\theta_{éq} - T_1) e^{-t/\tau_1}}$$

Q14c $\tau_1 = 7{,}2 . 10^5$ s $= 8{,}3$ jours

$T_1 = 41°C$ pour l'air à 17°C

17 Q15. D'après la question Q12, la puissance délivrée par le métabolisme s'écrit :

$$P_m = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + \mathring{m}\,\Delta H_{vap}$$

et $P_{m_0} = \dfrac{T_{int} - T_0}{R_1} + \mathring{m}\,\Delta H_{vap}.$

Ainsi : $P_m - P_{m_0} = \dfrac{T_0 - T_{air}}{R_1}. \Rightarrow T_{air} = T_0 - (P_m - P_0)R_1$

Sachant que : $T_{min} < T_{air} < T_{max} \Rightarrow T_{min} < T_0 - (P_m - P_0)R_1 < T_{max}$

$$\Rightarrow T_{min} - T_0 < -\frac{P_m - P_0}{R_1} < T_{max} - T_0 \iff (T_0 - T_{max})R_1 < P_m - P_0 < (T_0 - T_{min})R_1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{m_0} + \frac{T_0 - T_{max}}{R_1} < P_m < P_{m_0} + \frac{T_0 - T_{min}}{R_1}} \Rightarrow \underline{13\,W < P_m < 25\,W}$$

Q16 Système Brebis tondue

1er principe : $H(S(t+dt)) - H(S(t)) = \delta Q \Rightarrow c\rho L H^2 \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\delta Q}{dt}.$

de la même façon qu'à la question Q14a

$\rightarrow \delta Q^{th} = -\dfrac{T - T_{air}}{R_2}\,dt$

$\rightarrow \delta Q^{ev} = -(\mathring{m} + \mathring{m}')\,\Delta H_{vap}\,dt = -3\mathring{m}\,\Delta H_{vap}\,dt$ car $T_{air} > 5\,°C$.

bien que dans l'énoncé il soit préciser que $T_{air} > 5{,}1\,°C$.

$\rightarrow \delta Q^{met} = P_m \cdot dt.$

lace

Bilan : $c\rho H^2 L \dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T - T_{air}}{R_2} - 3\mathring{m}\,\Delta H_{vap} + P_m$.

avec $\mathring{m}\,\Delta H_{vap} = P_{m_0} - \dfrac{\theta_{ep} - T_0}{R_1}$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{air}}{R_2 c\rho H^2 L} = (P_m - 3P_{m_0})\frac{1}{c\rho L H^2} + \frac{3(\theta_{ep} - T_0)}{R_1 c\rho L H^2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_2}(T - T_{air}) = \frac{T_2 - T_{air}}{\tau_2}}$$

avec $\underline{\tau_2 = R_2 c\rho H^2 L}$ et $\underline{T_2 - T_{air} = R_2(P_m - 3P_{m_0}) + 3(\theta_{ep} - T_0)\frac{R_2}{R_1}}$

empér... ... de ... m'

$$\rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1} = 0{,}05. \qquad \tau_2 \ll \tau_1$$

L'établiss^t du régime permanent est beaucoup plus rapide pour la brebis tondue. Elle risque donc un coup de chaud ou de froid plus rapidement.

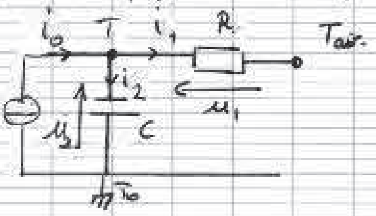
$$\rightarrow T_2 = T_{air} + R_2(P_m - 3P_{m_0}) + 3(\theta_{ep} - T_0)\frac{R_2}{R_1}$$

La brebis est dans de bonne condition si $T_2 = \theta_{ep}$

$$\Rightarrow \boxed{T_{air} = \theta_{ep} - R_2(P_m - 3P_{m_0}) - 3(\theta_{ep} - T_0)\frac{R_2}{R_1}}$$

AN : $\underline{T_{air_{max}} = T_{air}(P_m = 13W) = 36{,}8\ °C}$.

Q17 situation (1) $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_1}(T - T_{air}) = \frac{1}{\tau_1}(T_1 - T_{air})$



$i_0 = i_1 + i_2$

$$\begin{cases} u_1 = (T - T_{air}) = R\, i_1 \\ u_2 = \frac{Q}{C} \Rightarrow i_2 = C\frac{du_2}{dt} \\ u_2 = T - T_0 \end{cases}$$

$$i_0 = \frac{T - T_{air}}{R} + C\frac{dT}{dt}.$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{RC}(T - T_{air}) = \frac{i_0}{C}$$

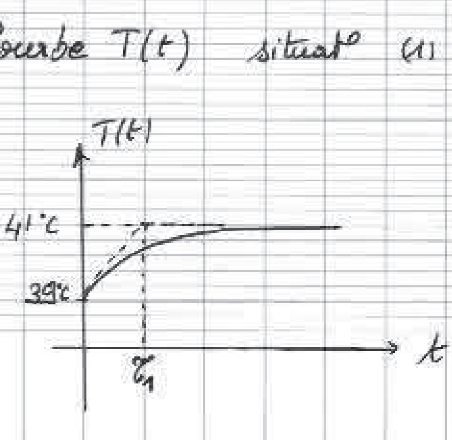
Par analogie nous avons : R_1 ; $C = \frac{\tau_1}{R_1}$ et $i_0 = \frac{T_1 - T_{air}}{R_1}$

situation (2) $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_2}(-T_{air} + T) = \frac{T_2 - T_{air}}{\tau_2}$

Le schema est le même avec $R = R_2$; $C = \frac{\tau_2}{R_2}$ et $i_0 = \frac{T_2 - T_{air}}{R_2}$

Courbe $T(t)$ situat^o (1) : $T(t) = T_1 + (\theta_{ep} - T_1)e^{-t/\tau_1}$

$T_1 = 41°C$; $\tau_1 = 8{,}3$ jours



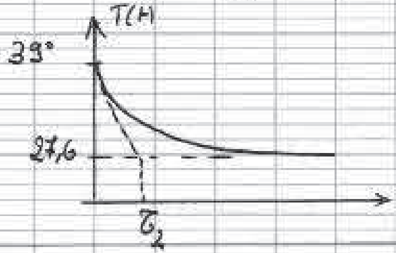
Brebis non tondue dans l'air à 17°C

→ Courbe $T(t)$ situation (2).

$$T = T_2 + (\theta_{éq} - T_2)\, e^{-t/\tau_2}$$

$\tau_2 = 0{,}4\,j$

$T_2 = 27{,}6\,°C$



Q18

	$C_6H_{12}O_6$	$+\,6O_2$	$\rightarrow 6CO_2$	$+\,6H_2O$
$\xi = 0$	n_1	n_2	0	0
t	$n_1 - \xi$	$n_2 - 6\xi$	6ξ	6ξ

$\Delta_r H° = -2800\ kJ/mol.$

Lorsque la brebis est dans des conditions de confort, elle a besoin de produire une puissance P_{m_0}.

Durant 1 minute cela revient à une production d'énergie :

$$\mathcal{E} = P_{m_0} \cdot \Delta t \quad \text{avec } \Delta t = 60\,s$$

Lorsque 1 mole de glucose est consommée, 6 moles d'O_2 le sont et le métabolisme a produit une énergie $\mathcal{E}' = -\Delta_r H°$.

Le nombre de moles d'O_2 nécessaire à produire $\mathcal{E}$ est :

$$n_{O_2} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} \cdot 6 = \frac{6 P_{m_0} \Delta t}{-\Delta_r H°} \qquad n_{O_2} = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,mol.$$

Dans 1 litre d'O_2 nous avons $n'_{O_2} = \frac{P_0 V_0}{R T_0}$

La brebis doit donc respirer un volume d'air V_B !

$$V_B = \frac{n_{O_2}}{n'_{O_2}} \cdot V_0 \Rightarrow V_B = n_{O_2} \cdot \frac{R T_0}{P_0}$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{6 P_{m_0} \Delta t}{-\Delta_r H°} \cdot \frac{R T_0}{P_0} \Rightarrow V_B = 5{,}3 \cdot 10^{-5}\,m^3$$

$$\Rightarrow V_B = 5{,}3\,mL.$$

I.4 Réponse du groupe de Brebis

Q19 Surface en contact avec l'air pour 1 brebis : $2H(H+2L)$

6 brebis : $12H(H+2L) = S_0 = 12H^2(1+2x$

Cas	1.	1'	2	2'
S	$2H^2 + 24LH$	$12H^2 + 14LH$	$4H^2 + 18LH$	$6H^2 + 16LH$
$S_0 - S$	$10H^2$	$10H^2 x$	$8H^2 + 6H^2 x$	$6H^2 + 8H^2 x$
$S_0 - S$ AN $x = 3.3$	$10H^2$	$33 H^2$	$27{,}8 H^2$	$32{,}4 H^2$

* La conductance : $\frac{(G_r + G_{cv}) G_{diff}}{G_{diff} + G_r + G_{cv}}$ est proportionnelle à la surface de contact avec l'air
=> Le dispositif permettant d'avoir la conductance la plus faible correspond au dispositif permettant la plus grande diminution de $S_{contact}$ soit le cas 1'

* $\varphi_0 \rightarrow S_0$
$\varphi_0' \rightarrow S_0'$

$$\frac{\varphi_0 - \varphi_0'}{\varphi_0} = \frac{S_0 - S_0'}{S_0} = \frac{5x}{6(1+2x)} = 0{,}36.$$

↘ relative de 36 %.

* Le brebis au bord du groupe vont se refroidir ⊕ vite que celles au centre. Elles ont donc intérêt à intervertir leur place afin de préserver l'ensemble du groupe.

Problème II : Diffusion des bulles de champagne

1) Ce qui entre : $j(r).4\pi\, r^2\,.dt$ Ce qui sort : $-\,j(r+dr).4\pi\,(r+dr)^2.dt$. Donc : $\delta^2 Ne = \left(j(r).4\pi\, r^2 - j(r+dr).4\pi\,(r+dr)^2\right) dt \;\Rightarrow$

$$\delta^2 Ne = -4\pi\,\frac{\partial(r^2 j(r))}{dr}\,dr\,dt$$

2) En régime stationnaire, $\delta^2 Ne = 0$ donc $\frac{\partial(r^2 j(r))}{dr} = 0$ soit $r^2 j(r) = const.$
La loi de Fick s'écrit $\vec{j} = -D.\overrightarrow{grad}C$ donc $j(r) = -D\frac{\partial C}{\partial r} = -D\frac{dC}{dr}$ $r^2 j(r) = const \Rightarrow r^2\,\frac{dC}{dr} = A$ $dC = A\frac{dr}{r^2}$ s'intègre en $C = B - \frac{A}{r}$ qui est bien de la forme

$$C = \alpha + \frac{\beta}{r}$$

3) $C(\infty,t) = \frac{\chi p_i}{k_B T} = \alpha$ et $C(a,t) = \frac{\chi p_e}{k_B T} = \alpha + \frac{\beta}{a}$ donc on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\chi p_i}{k_B T} \\ \beta = \frac{\chi(p_e - p_i)}{k_B T}\,a \end{cases}$$

4) Pendant dt, il sort de la bulle de gaz $-dN_g = j(a)4\,\pi\,a^2\,dt$ molécules. Avec $j(a) = -D\frac{\partial C}{\partial r}(a) = -D(-\frac{\beta}{a^2}) = \frac{D\beta}{a^2}$. donc $\frac{dN_g}{dt} = -4.\pi.\beta D \;\Rightarrow$

$$\frac{dN_g}{dt} = -4.\pi.D\frac{\chi.\,(p_e - p_i)}{k_B.T}a$$

5) Le gaz est assimilé à un gaz parfait de pression p_e, de volume $\frac{4}{3}\pi\,a^3$, de quantité de matière $\frac{N_g}{N_A}$, à la température T. On a donc $p_e\frac{4}{3}\pi a^3 = N_g.k_B.T$ soit $N_g = \frac{4\pi\,p_e}{3k_B\,T}\,a^3$ donc $\frac{dN_g}{dt} = \frac{4\pi\,p_e}{k_B\,T}\,a^2\,\frac{da}{dt}$ Or, on a vu que $\frac{dN_g}{dt} = -4\pi\,D\,\frac{\chi(p_e - p_i)}{k_b T}a$, on en déduit donc :

$$a.\dot{a} = K = D.\chi.\left(\frac{p_i}{p_e} - 1\right)$$

Homogénéité : OK (en $m^2.s^{-1}$).
6) $a\,\dot{a} = K$ s'intègre en $a(t)^2 - a(0)^2 = 2.K.t$ soit

$$a(t) = \sqrt{a(0)^2 + 2.K.t}$$

Application numérique pour K :

$$K = D.\chi(\frac{p_i}{p_e} - 1) = 4,2.10^{-9}m^2.s^{-1}$$

conforme à la valeur proposée. La phase de croissance des bulles de a_0 à a_1 dure un temps

$$\tau_1 = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2.K} = 12,5ms$$