TD9

Mécanique

Rappels

Questions de cours

- **Déterminer** $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ dans le système de coordonnées cylindriques. Donner $d\overrightarrow{OM}$ dans le système sphérique
- Donner la force de Lorentz
- Démontrer le TEC
- Comment définit-on une position d'équilibre ? Comment savoir qu'elle est stable ou non ?
- Qu'est ce qu'une force conservative ?
- Démontrer le TMC
- Qu'est ce que le moment d'inertie ?
- Expliquer ce qu'est un bras de levier
- Démontrer qu'un mouvement du à une force centrale est plan
- Citer les 3 lois de Kepler
- Qu'est ce qu'un état lié, un état libre (diffusif). Dans quel cas le mouvement d'un point soumis à une force centrale est une ellipse, une parabole, un hyperbole, un cercle,
- Déterminer l'expression de la vitesse de libération

Applications directes du cours

Exercice 1 - Brique sur un plan incliné - ♥ / ★

On considère un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Une brique de masse $m = 600\ g$ est lancée depuis le bas du plan vers le haut avec une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $\|\vec{v}_0\| = 2,4\ m.s^{-1}$.
On utilise, pour étudier le mouvement, un axe (Ox) parallèle au plan incliné, dirigé vers le haut, et tel que O coïncide avec le point de départ de la brique.

1. On suppose dans un premier temps que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottement.
   (a) Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de la montée.
   (b) Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.
2. On prend désormais en compte l'existence de frottements solides. La force de contact s'écrit donc $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ avec $\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\|$ où $f = 0,20$ est le coefficient de frottement.
   Reprendre les deux questions précédentes.

Exercice 2 - Chaussette dans un sèche-linge - ♥♥♥ / ★

Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases :

— dans un premier temps, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme.

— elle retombe en chute libre dans un deuxième temps.

L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce lieu.
On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25\ cm$ tournant à 50 tours.min^{-1}. On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel M de masse m. On étudie la première phase, pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour et en restant collé aux parois du tambour. Pour les applications numériques, on considère que $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

1. Déterminer l'accélération de la chaussette.
2. En déduire la réaction du tambour sur la chaussette.
3. Pour quel angle la chaussette se décolle-t-elle de la paroi du tambour ?
4. Quel est le mouvement ultérieur de la chaussette ?

Exercice 3 - Pendule simple - ♥♥♥ / ★

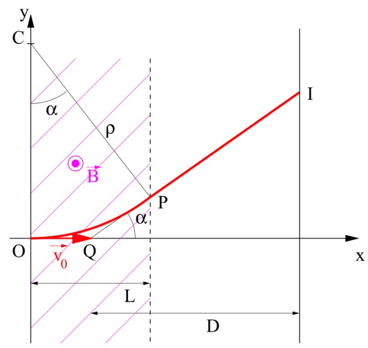
Soit un pendule simple de longueur ℓ et de masse m est écarté de la verticale d'un petit angle θ_0 et lâché sans vitesse initiale.

1. Faire un schéma du pendule
2. Déterminer l'équation du mouvement du pendule en utilisant :
   (a) Le principe fondamental de la dynamique
   (b) Le théorème de la puissance cinétique
   (c) Le théorème du moment cinétique
3. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
4. Tracer la courbe d'énergie potentielle et déterminer les conditions d'équilibre du système ainsi que leur stabilité

Exercice 4 - Déflexion magnétique - ♥♥ / ★★

On considère un faisceau d'électrons, de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, qui pénètrent en O dans une zone de largeur L suivant (Ox) dans laquelle règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.
On suppose que le champ magnétique est nul en dehors de ce domaine. On suppose également que $L \ll \dfrac{mv_0}{eB} = \rho$.

On place à la distance $D + \dfrac{L}{2}$ de O un écran fluorescent.



1. Déterminer l'expression de la force magnétique qui s'applique à l'électron

2. A l'aide du PFD montrer que la vitesse de rotation autour de C est constante et déterminer le rayon ρ de cette trajectoire.
3. Déterminer l'ordonnée y_P du point P où l'électron quitte le domaine où règne $\vec{B}_0$.
4. En déduire la position du point d'impact I sur l'écran.

Exercice 5 - Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène - ♥♥ / ★★★

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron (masse m, charge $q = -e$) et le proton (masse $m' \gg m$, charge $q' = +e$) de l'atome d'hydrogène.
On se place dans le modèle classique de Bohr où l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r autour du proton supposé fixe et centré sur O.
L'hypothèse de Bohr consiste à poser $\|\vec{L_O}\| = n\hbar$, n étant un entier, $\hbar$ la constante de Planck réduite ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$) et $\vec{L_O}$ le moment cinétique en O de l'électron.

1. Montrer que l'énergie mécanique E_m de l'électron peut s'écrire $E_m = -\frac{E_0}{n^2}$, et exprimer E_0.
2. Calculer E_0 en électron-volt sachant que $\hbar = 1,055.10^{-34}\ J.s$, $m = 0,9.10^{-30}\ kg$, $e = 1,6.10^{-19}\ C$ et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,0.10^9\ SI$

Exercice 6 - Chute d'un arbre - ♥♥/ ★ ★

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui O sur le sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas, et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile.
On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $J = \dfrac{1}{3}mL^2$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut

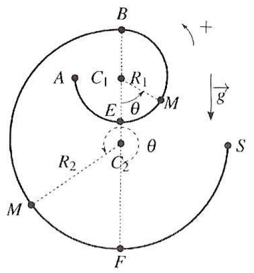
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

3. En réécrivant cette relation sous la forme $\sqrt{\dfrac{3g}{L}}dt = \dfrac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$, déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.
On donne l'intégrale suivante, pour $\theta_0 = 5°$:

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1.$$

Approfondissement

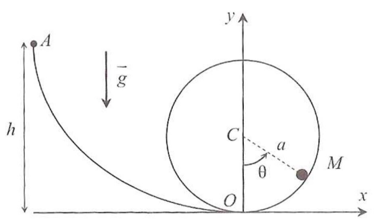
Exercice 7 - Anneau sur une piste circulaire - ♥ / ★★



On considère le dispositif de la figure ci-contre, où un objet assimilable à un point matériel M de masse m se déplace solidairement à une piste formée de deux parties circulaires de rayons respectifs R_1 et R_2, et de centres respectifs C_1 et C_2, dans un plan vertical.
On repère la position de M par l'angle θ. Pour la partie (1), $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, et pour la partie (2), $\theta \in \left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.
Il n'y a pas de frottements et on note g l'accélération de la pesanteur.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du point M. On choisira l'origine des potentiels au point B ($\theta = \pi$). On distinguera les cas (1) et (2).
2. Tracer l'allure de $E_p(\theta)$.
3. Déterminer les positions angulaires d'équilibre et discuter leur stabilité.
4. L'anneau est initialement en A ($\theta = -\dfrac{\pi}{2}$). Il est lancé à une vitesse V_0 dans le sens trigonométrique.
   (a) À quelle condition sur la vitesse V_0 l'anneau peut-il atteindre le point F en $\theta = 2\pi$?
   (b) Cette condition étant remplie, donner l'expression de sa vitesse V_F en fonction des données du problème.
   (c) À quelle condition sur V_0 l'anneau sort-il de la piste en S ($\theta = \dfrac{5\pi}{2}$?

Exercice 8 - Acrobaties - ♥♥ / ★★



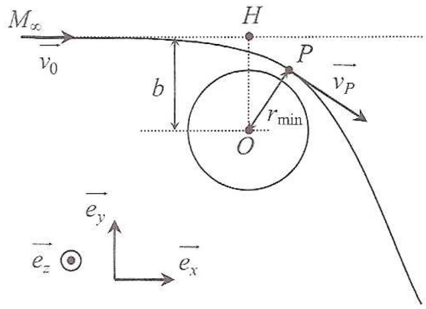
Un adepte du roller, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au dessus de O, point le plus bas de la rampe. À partir de O, la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (xOy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.
On note $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme v_0 de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive en O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est $\vec{R} = -mg\left(\dfrac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)$.
4. Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? (Répondre sans calcul)
   Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ? (Répondre sans calcul)

5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre.

Exercice 9 - Alerte à l'astéroïde - ♥♥♥ / ★★

De nombreux objets, dits "géocroiseurs", passent à proximité de la Terre ... et parfois la heurtent. On considère ici un astéroïde de masse m, actuellement très éloigné de la Terre et de tout autre astre, et ayant donc une vitesse constante $\vec{v}_0$. Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b (appelée "paramètre d'impact") du centre O de la Terre ; cependant, lorsqu'il se rapprochera de la Terre, l'attraction gravitationnelle de celle-ci va dévier l'astéroïde, selon une trajectoire hyperbolique. On appelle périgée le point P de cette trajectoire le plus proche du centre de la Terre.



1. Quelles sont les deux grandeurs dynamiques de l'astéroïde qui se conservent au cours de son mouvement ? Écrire les deux équations correspondantes en considérant les deux positions M_∞ et P.
2. En déduire la distance minimale d'approche $r_{min} = OP$.
3. Application numérique : pour $b = 1,4.10^5\ km$ et $v_0 = 2,0\ km.s^{-1}$, l'astéroïde heurte-t-il la Terre ?

Élements de réponse

Ex 1. $x(t) = -\dfrac{g\sin\alpha}{2}t^2 + v_0 t$; $t_a = \dfrac{v_0}{\sin\alpha} = 0,71\ s$ et $x(t_a) = 0,86\ m$; $t'_a = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0,46\ s$.

Ex 2. $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e}_r$; $R_N =_m R\omega^2 + mg\sin\theta$ et $R_T = mg\cos\theta$; $\sin\theta_0 = \dfrac{R\omega^2}{g} = 0,70$ et $\theta_0 = 44,4°$; vol parabolique après la perte de contact.

Ex 3. $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$; $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$; 0 et π positions d'équilibre respectivement stable et instable.

Ex 4. $y_P = \dfrac{L^2 eB}{2mv_0} = 0,45\ mm$; $y_I = D\dfrac{LeB}{mv_0} = 1,8\ cm$

Ex 5. $E_m = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\dfrac{1}{n^2}$ et $E_0 = 13,56\ eV$

Ex 6. $\dfrac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = mg\dfrac{L}{2}\sin\theta$; écrire l'intégrale première du mouvement ; $\Delta t = 5,1\ s$.

Ex 7. $E_{p1} = -mgR_1(1+\cos\theta)$; $E_{p2} = -mgR_2(1+\cos\theta)$; équilibres stables en $\theta = 0$ et 2π et instable en $\theta = \pi$; $V_0 \geq \sqrt{2gR_1}$

Ex 8. $v_0 = \sqrt{2gh}$; $v = \sqrt{2g(h + a(\cos\theta - 1))}$; $h > \dfrac{5}{2}a$

Ex 9. (a) E_m et L_O se conservent ; (b) $r_{min} = \dfrac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}$ (c) $r_{min} = 7,2.10^4\ km > R_T$ pas de collision.