
TD 10

Mécanique non galiléenne

Questions de cours

- Démontrer la formule de Varignon
- Démontrer les lois de composition des vitesses et des accélérations
- Comment se simplifie v_e et a_e dans le cas d'une translation ?
- Comment se simplifie v_e et a_e dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe ?
- Définir la notion de point coïncident.
- Définir un référentiel galiléen.
- Donner les temps caractéristique pendant lesquels les référentiels usuels sont supposés galiléens.
- Comment s'écrit le PFD dans un référentiel non galiléen ?
- Que dire du travail de la force de Coriolis ?
- Définir la latitude et la longitude
- Comment est défini le champ de gravitation $\vec{g}$?

Applications directes du cours

Exercice 1 - Tapis roulant - ♥ / ★

Lors d'un jeu télévisé, un joueur A doit traverser un tapis roulant de largeur a , pour donner un paquet à un second joueur B . Le tapis se déplace à une vitesse constante V_T par rapport au sol. Lorsque le joueur se déplace sur le tapis, sa vitesse par rapport au tapis a pour norme V constante.

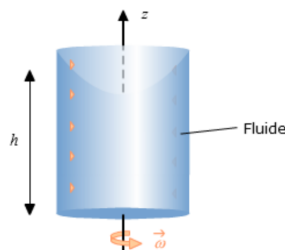
1. Le joueur A se déplace avec une vitesse $\vec{V}$ perpendiculaire au bord du tapis. Où doit se placer B pour réceptionner le paquet ? Quel est le temps t_1 de traversée du tapis ?
2. Pour le deuxième essai, le joueur B est positionné en face de A . Dans quelle direction le joueur A doit-il courir ? Quel est le temps de traversée t_2 ?
3. On suppose maintenant que la vitesse $\vec{V}$ de A fait un angle θ quelconque avec $\vec{V}_T$. Déterminer le temps de traversée t_3 en fonction de a , V , et θ . Pour quelle valeur de θ le temps de traversée est-il le plus court ?

Exercice 2 - Force de Coriolis sur un train - ♥♥ / ★★

Un train à grande vitesse, de masse $m = 7,8 \cdot 10^5$ kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante $v = 300$ km h⁻¹ ; à l'instant considéré, il se trouve à la hauteur de Valence, à la latitude $\lambda = 45^\circ$ nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_x$ vers l'est, $\vec{e}_y$ vers le nord et $\vec{e}_z$ vers le zénith.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P , le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.
2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$; $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.
3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?

Exercice 3 - Liquide dans un bol en rotation - ♥♥♥ / ★★



Soit un vase de rayon R contenant un liquide dont la surface libre est initialement à la hauteur h . On fait tourner le vase autour de son axe (Oz) à la vitesse angulaire ω .

1. Quelle est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement ?
2. En déduire l'équation de la surface libre du liquide.

Approfondissement

Exercice 4 - Les chaises volantes - ♥♥ / ★★

Les chaises volantes sont une variante de manège de type carrousel dans lesquelles des sièges sont suspendus depuis le haut du manège au bout de chaînes métalliques. Lors de la rotation du manège, les chaises sont inclinées vers l'extérieur par la force centrifuge.



Combien de tours de manège fait-on en 3 minutes ?

On trouve sur internet une photo d'un de ces manèges avec le descriptif suivant : Manège voltigeur authentique 1930, pièce rare avec musique d'orgue de barbarie.

Diamètre 8 mètres à l'arrêt et 16 mètres en action, hauteur 7 m, poids 9 tonnes. 25 places.

Exercice 5 - Bol en rotation - ♥♥ / ★★

Une bille, assimilée à un point matériel M , de masse m , est astreinte à se déplacer, sans frottement, sur la surface intérieure d'une demi-sphère creuse $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon r_0 . Cette surface tourne uniformément à la vitesse angulaire ω constante, autour de son axe de révolution (Oz) . On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{r_0}}$, avec g l'accélération de la pesanteur. On note $\mathcal{R}_L$ le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, et $\mathcal{R}_S$ le référentiel lié à la sphère.

1. On se place dans $\mathcal{R}_S$, et on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour repérer le point M . Montrer que l'énergie potentielle de M dans $\mathcal{R}_S$ est

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 z \left(\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 r_0 + z \right)$$

2. Déterminer les cotes z_e des positions d'équilibre de M dans $\mathcal{R}_S$ et étudier leur stabilité en fonction de la valeur de ω_0/ω .
Représenter z_e en fonction de ω_0/ω .
3. (a) Tracer la courbe $E_p(z)$ lorsque $\omega_0/\omega = 0, 2$.
(b) Un dispositif permet de lâcher la bille sans vitesse initiale dans $\mathcal{R}_S$. On note z_0 la cote initiale. Discuter qualitativement le mouvement ultérieur de la bille en fonction de son énergie mécanique.

Exercice 6 - Pendule de Foucault - ♥♥♥ / ★★★

On s'intéresse au mouvement d'un pendule simple constitué d'une masse $m = 30$ kg suspendue à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $\ell = 67$ m. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point A fixe par rapport au sol, situé à une hauteur égale à ℓ . À l'instant initial, on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 5^\circ$ dans le plan méridien et on l'abandonne sans vitesse initiale. En un point P de latitude λ , on utilise la base de projection cartésienne $Pxyz$ en prenant Pz selon la direction verticale du lieu et Px dirigé vers l'est.

1. On suppose dans un premier temps que le référentiel terrestre est galiléen.
 - (a) Montrer que le mouvement s'effectue dans un plan que l'on précisera.
 - (b) Établir l'équation horaire du mouvement par exemple en donnant l'expression de l'angle θ entre le filin et la verticale.
 - (c) Calculer les amplitudes maximales des positions, des vitesses et des accélérations dans les deux directions où s'effectuent le mouvement.
2. On tient compte désormais de la rotation de la Terre sur elle même.
 - (a) Déterminer la valeur de la vitesse angulaire Ω associée.
 - (b) En déduire que le fait de tenir compte de la rotation de la Terre est une correction par rapport au mouvement précédent.
 - (c) Expliquer qualitativement pourquoi on peut considérer que le mouvement de ce pendule ne détecte pas la rotation de la Terre à l'équateur.
3. On cherche à écrire les équations du mouvement
 - (a) Expliciter dans la base de projection proposée les équations du mouvement.
 - (b) En faisant des approximations à justifier à l'aide des questions précédentes, montrer que les équations du mouvement précédent peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y}\sin\lambda + \omega_0^2x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x}\sin\lambda + \omega_0^2y = 0 \\ T = mg \end{cases}$$

- (c) On résout ce système en utilisant la notation complexe : on pose $\underline{Z} = x + iy$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{Z}$.
 - (d) La résoudre pour obtenir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
 - (e) Interpréter physiquement la solution.
4. Cette expérience fut réalisée sous la coupole du Panthéon en 1852 par Léon Foucault (1819-1868) qui mesura une période de 31 h46 min.
 - (a) Déterminer la durée d'un tour complet du plan d'oscillations à la latitude $48^\circ 51'$ (latitude de Paris). Que penser des résultats obtenus par Foucault ?
 - (b) Comparer les périodes à l'équateur, au pôles et à la latitude de 45° .
 - (c) Ce résultat dépend-il de l'hémisphère dans lequel est réalisé l'expérience ?

Éléments de réponse

$$1. t_1 = \frac{a}{V}; t_2 = \frac{a}{\sqrt{V^2 - V_T^2}}; t_3 = \frac{a}{V \sin \theta} \text{ minimal pour } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \vec{f}_{ic} = -2m\Omega \sin \lambda \vec{e}_x; f_{ic} = 6,7 \text{ kN} = 9.10^{-4} P$$

$R_x = f_{ic}$, c'est le rail de droite qui s'usera plus vite.

$$3. E_p = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2; z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + cst$$

$$4. \text{L'angle de la chaîne avec la verticale est approximativement } \theta = 64^\circ.$$

On fait environ 45 tours en 3 minutes.

$$5. E_{p,pes} = mgz + cte; E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + cte \text{ et } z^2 + r^2 = r_0^2$$

$$z_e = -\frac{r_0 \omega_0^2}{2 \omega^2}$$

Pour une énergie mécanique négative, on observe un mouvement oscillatoire entre deux cotes z_1 et z_2 , de part et d'autre de la position d'équilibre z_e .

$$6. \quad 1. \text{ Le mouvement reste dans un plan initial défini par la direction initiale du fil et la verticale locale. } \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0.$$

$$\begin{aligned} z_{max} &= \frac{\ell \alpha^2}{2} & d_{max} &= \ell \alpha \\ \dot{z}_{max} &= \omega_0 \ell \alpha^2 & \dot{d}_{max} &= \omega_0 \ell \alpha \\ \ddot{z}_{max} &= \ell \alpha^2 \omega_0^2 & \ddot{d}_{max} &= \omega_0^2 \ell \alpha \end{aligned}$$

$$2. \Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27.10^{-5} \text{ rad s}^{-1}. \text{ La force d'inertie de Coriolis est petite devant les autres forces présentes, il s'agit donc d'une correction par rapport au mouvement précédent. Au niveau de l'équateur, cette force est quasi-nulle.}$$

$$3. \ddot{\underline{Z}} + 2i\Omega \sin \lambda \dot{\underline{Z}} + \omega_0^2 \underline{Z} = 0$$

$$x(t) = \ell \sin \alpha \cos(\omega_0 t) \sin \Omega \sin(\lambda t)$$

$$y(t) = \ell \sin \alpha \cos(\omega_0 t) \cos \Omega \sin(\lambda t)$$

$$4. T' = 31 \text{ h}52 \text{ min.}$$

À l'équateur $T' \rightarrow \infty$, aux pôles $T' = 24 \text{ h}$ et à la latitude de 45° , $T' = 33 \text{ h}56 \text{ min}$.

Le résultat dépend de l'hémisphère dans lequel on se place, les sens de rotations du plan d'oscillations sont opposés (vers l'est dans l'hémisphère nord et vers l'ouest dans l'hémisphère sud).