TD 11

Ondes mécaniques

Questions de cours

- — Définir le module d'Young.
- — Démonter que le déformation longitudinale d'un matériaux vérifie une équation de d'Alembert.
- — Expliquer l'approximation des milieux continus.
- — Démontrer que la déformation transverse d'une corde vérifie l'équation de d'Alembert.
- — Donner l'équation de d'Alembert ainsi que ses caractéristiques.
- — Donner les formes possibles de solutions de l'équation de d'Alembert.
- — Définir la vitesse de phase.
- — Démontrer la relation de dispersion.
- — Quelles sont les caractéristiques d'un OPH, comment obtenir une solution plus juste physiquement ?
- — Déterminer la forme d'une OS solution de l'équation de d'Alembert.
- — Montrer que les conditions aux limites sur une corde imposent l'existence de modes.
- — Décrire une OS (Ventres, noeuds...).
- — Montrer que les conditions initiales sont reliées à l'amplitude des modes pouvant se propager.
- — Expliquer le phénomène de résonance.

Applications directes du cours

Exercice 1 - Corde de Melde - ♥♥ / ★

Lors d'une manipulation avec la corde de Melde tendue grâce à une masse M, on trouve les résultats ci-dessous.

1. Pour une même longueur L de la corde et une même masse M accrochée à celle-ci, on obtient les résultats suivants :
   - — fréquence de résonance 19 Hz pour deux fuseaux ;
   - — fréquence de résonance 28 Hz pour trois fuseaux.

   (a) Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ?

   (b) Quelles seraient les fréquences de résonances suivantes ?
2. La longueur de la corde est $L = 117\ cm$. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation ?
3. La masse M accrochée à la corde est égale à $M = 25\ g$.

   (a) Quelle est la tension de la corde ?

   (b) En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

Exercice 2 - Réflexion sur une corde tendue - ♥♥ / ★★

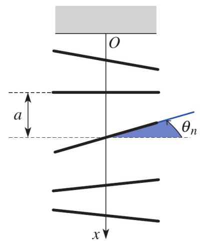
Une corde de masse linéique μ est tendue avec une tension T_0. On néglige les effets de la pesanteur.
La corde est supposée semi-infinie et s'étend de $x \to -\infty$ à $x = 0$. Une onde transversale s'y propage dans le sens des x croissants. Son équation est représentée par la fonction $y_i(x,t) = F(t - \frac{x}{c})$.

Déterminer l'élongation réfléchie $y_r(x,t)$ quand :

1. l'extrémité $x = 0$ peut coulisser sans frottement sur l'axe Oy ;
2. l'extrémité $x = 0$ est fixée en O.

Exercice 3 - Échelle de perroquet - ♥♥♥ / ★★

On considère une chaîne infinie de pendules de torsion de constante de torsion C couplés par des fils de torsion. Le pendule de torsion n situé dans un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) est repéré par son abscisse $x = na$, fait un angle θ_n par rapport à un axe horizontal et on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox). Il subit du fil situé entre le pendule n et le pendule $n+1$ un moment égal à : $\overrightarrow{\Gamma} = C(\theta_{n+1} - \theta_n)\overrightarrow{e_x}$.

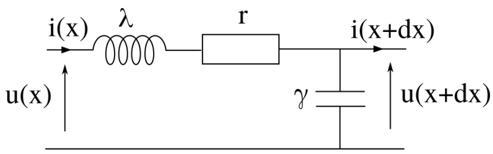


1. En appliquant la PFD au pendule n déterminer l'équation du mouvement vérifiée par θ_n.
2. Que devient-elle dans l'approximation des milieux continus ? En déduire l'équation de propagation de l'onde de torsion.
3. A quelle vitesse se propagerait une onde de torsion ?

Approfondissement

Exercice 4 - Équation des télégraphistes- ♥♥♥ / ★★

On modélise un câble coaxial afin d'étudier la propagation d'une onde électrique en son sein. Un élément de longueur dx d'un câble coaxial peut être modéliser comme suit :



— λ est l'inductance linéique du câble, c'est à dire son inductance par unité de longueur. Elle modélise les effets magnétiques à l'intérieur du câble

— γ est la capacité linéique du câble, c'est à dire sa capacité par unité de longueur. Elle modélise la capacité formée par les parties (gaine et coeur) du câble coaxial.

— r est la résistance linéique du câble , c'est à dire la résistance par unité de longueur. Elle modélise les pertes par effet Joules le long de la propagation.

1. Déterminer l'inductance, la capacité et la résistance pour un élément de câble de longueur dx.
2. A l'aide de la loi des mailles et la loi des noeuds, établir deux équations différentielles couplées reliant les dérivées de u et de i.

3. En déduire l'équation différentielle au dérivée partielle vérifiée par $i(x,t)$. Est-ce une équation de d'Alembert ? Quelle est sa différence ?
   On considère maintenant un câble sans pertes.
4. Comment se réécrit l'équation précédente, que retrouve-t-on ?
5. On étudie la propagation dune onde plane progressive harmonique se propageant vers les $x > 0$. On pose $\underline{i}(x,t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx))$ et $\underline{u}(x,t) = U_0 \exp(j(\omega t - kx))$.
   (a) Montrer que $\underline{u}$ et $\underline{i}$ sont en phase. Établir la relation de dispersion. Le milieux est-il dispersif ?
   (b) On pose $\underline{Z_c} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$. Exprimer $\underline{Z_c}$ en fonction de λ et γ. Calculer l'impédance caractéristique de la ligne $\underline{Z_c}$ et c la vitesse de propagation des ondes sachant que $\lambda = 0,28\ \mu H.m^{-1}$ et $\gamma = 112\ pF.m^{-1}$.
6. Que devient la relation $\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ pour une onde plane progressive harmonique se propageant vers les $x < 0$?
7. L'extrémité de la ligne $(x = L)$ est fermée sur une impédance complexe $\underline{Z_r}$. On pose :

$$\underline{i}(x,t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx)) + I_0' \exp(j(\omega t + kx))$$

.

   (a) En déduire $\underline{u}(x,t)$
   (b) Calculer à l'extrémité du cable, le coefficient de réflexion en tension puis le coefficient de réflexion en intensité. Interpréter les cas particuliers : $\underline{Z_r} = 0$, $\underline{Z_r} \to \infty$ et $\underline{Z_r} = \underline{Z_c}$.

Exercice 5 - Spectre d'une corde pincée - ♥♥ / ★★★

Une corde de guitare, inextensible, de longueur L, de masse linéique μ_l, est tendue avec une tension T_0.
On note $y(x,t)$ les déplacements transversaux, supposés petits. On néglige la pesanteur. On note $\overrightarrow{T}(x,t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fill d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x. Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x,t)$ à l'instant t. Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x,t)$ petit.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans la corde.
2. La corde de guitare, de longueur L, est fixée en $x = 0$ et en $x = L$. Montrer que l'équation d'onde admet comme solutions les ondes stationnaires de la forme :

$$y_n(x,t) = C_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

   On donnera les expressions de k_n et ω_n.
3. Expliquer pourquoi la solution générale de l'équation d'onde est

$$y(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} \sin(k_n x)(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

   On admet que les coefficient A_n et B_n sont donnés par :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t=0) \sin(k_n x) dx \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \frac{dy}{dt}(x, t=0) \sin(k_n x) dx$$

   On lâche cette corde sans vitesse initiale en la pinçant en son milieu (en $x = \frac{L}{2}$), après l'avoir éloignée de la distance h de l'axe Ox.

4. Déterminer les coefficients A_n et B_n.
5. Tracer l'allure du spectre de cette corde pincée et commenter.

Exercice 6 - Amplitude réfléchie sur la corde de Melde - ♥♥ / ★★★

On considère une corde de Melde de longueur L (corde fixée en son extrémité). On interprète la vibration de la corde de la manière suivante : le vibreur émet une onde qui se propage en direction du point fixe où l'onde est réfléchie ; cette onde réfléchie se propage en direction du vibreur où elle se réfléchit, et ainsi de suite.
L'axe (Ox) est parallèle à la corde au repos ; le vibreur est en $x = 0$ et le point fixe en $x = L$. Le vibreur émet une onde $s_0(x,t)$ telle que $s_0(0,t) = a_0 \cos(\omega t)$. La célérité des ondes sur la corde est c et on note $k = \frac{\omega}{c}$.
On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

— Lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur la poulie en $x = L$, l'onde réfléchie s_r vérifie : $s_r(L,t) = -rs_i(L,t)$ où r est un coefficient compris entre 0 et 1

— Lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur la poulie en $x = 0$, l'onde réfléchie s'_r vérifie : $s'_r(0,t) = -r's'_i(0,t)$ où r' est un coefficient compris entre 0 et 1

1. Exprimer l'onde $s_0(x,t)$.
2. Exprimer l'onde $s_1(x,t)$ qui apparaît par réflexion de l'onde s_0 sur le point fixe, puis l'onde $s_2(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_1 sur le vibreur, puis l'onde $s_3(x,t)$ qui apparait par réflexion de l'onde s_2 sur le point fixe.
3. A quelle condition les ondes s_0 et s_2 sont-elles en phase en tout point ? Que constate-t-on alors pour les ondes s_1 et s_2 ? La condition précédente est supposée réalisée dans la suite.
4. Justifier l'expression suivante de l'onde totale existant sur la corde :

$$s(x,t) = a_0(1+rr'+(rr')^2+...+(rr')^n+...)\cos(\omega t-kx) - ra_0(1+rr'+(rr')^2+...+(rr')^n+...)\cos(\omega t+kx)$$

5. En quels points de la corde l'amplitude de la vibration est-elle maximale ? Exprimer l'amplitude maximale A_{max} en fonction de a_0,r,r'. on donne la formule : $\sum_{n=0}^{\infty}(rr')^n = \frac{1}{1-rr'}$
6. En quels points l'amplitude est-elle minimale ? Exprimer l'amplitude minimale A_{min}.
7. Expérimentalement on trouve $\frac{A_{min}}{a_0} \simeq 1$ et $\frac{A_{max}}{a_0} \simeq 10$. Déterminer r et r'.

Éléments de réponse

Ex 1.
1. $\nu_n = n\frac{c}{2L}$
2. $c = 22\ m.s^{-1}$
3. $T = 0,25\ N$; $\mu_l = 5.10^{-4}\ kg.m^{-1}$

Ex 2.
1. $\frac{\partial y_{tot}}{\partial x}(0,t) = 0$
2. $y_{tot}(0,t) = 0$

Ex 3.
1. $J\ddot{\theta_n} = C(-2\theta_n + \theta_{n-1} + \theta_{n+1})$
2. Equation de d'Alembert

Ex 4.
1. $L = \lambda dx$; $C = \gamma dx$; $R = rdx$
2. $-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + \lambda\frac{\partial i}{\partial t}$; $\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\frac{\partial u}{\partial t}$
5. Passer en complexe ; $\underline{Z_c} = \frac{\omega\lambda}{k} = c\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$
6. $\underline{Z'_c} = -\underline{Z_c}$
7. $\rho_I = \frac{i_r}{i_i} = \frac{Z_c - Z_r}{Z_c + Z_r}$

Ex 5.
2. Utiliser les conditions aux limites
4. $A_{2p+1} = (-1)^p\frac{8h}{\pi^2(2p+1)^2}$; $B_n = 0$

Ex 6.
1. $s_0(x,t) = a_0\cos(\omega t - kx)$
2. $s_1(L,t) = -rs_0(L,t)$; $s_1(x,t) = -ra_0\cos(\omega t + kx - 2kL)$
5. Ondes contrapropageantes sont en phase.
$x_{l,q} = (2l+1)\frac{L}{2q}$; $A_{max} = a_0\frac{1+r}{1-rr'}$
7. $r = \frac{9}{11}$; $r' = 1$