
DM 5
Ondes et mécanique des fluides

À rendre le Jeudi 14 janvier

PROBLEME I : Etude d'une canalisation domestique d'amenée d'eau. (CCP)

On considère un écoulement incompressible, laminaire et en régime permanent d'eau liquide dans un tube cylindrique d'axe horizontal Oz et de diamètre D. On note ρ sa masse volumique et η sa viscosité, supposées constantes.

On néglige l'effet de la pesanteur. On rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit : $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$

34) Quelle(s) hypothèse(s) nous conduit (conduisent) à chercher l'expression de $\vec{v}$ sous la forme : $\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_z$?

35) Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. En déduire que la vitesse $v(r, z)$ ne dépend pas de z . On la notera donc $v(r)$ par la suite.

36) Par application de l'équation de Navier Stokes : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = - \overrightarrow{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v}$:

a) montrer que la pression P ne dépend pas de r ,

b) montrer que la fonction $v(r)$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{\eta}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] = K$, où K est une constante supposée connue.

37) En remarquant que $v(r)$ reste finie et en précisant une autre condition aux limites, déterminer l'expression de $v(r)$ en fonction de K , η , r et D. Quel est le signe de K lorsque $v > 0$?

38) Déterminer l'expression du débit volumique, noté Q_v , en fonction de K , η et D.

39) A quelle distance r de l'axe la vitesse est-elle maximale ? En notant v_0 cette vitesse maximale, exprimer v_0 en fonction de Q_v et D.

40) Le nombre de Reynolds est défini comme le quotient de deux termes de même dimension. Comment se nomment ces deux termes ?

Préciser alors l'expression du nombre de Reynolds en fonction de ρ , D, η et Q_v . On admettra que la vitesse caractéristique de l'écoulement correspond à la vitesse moyenne : $U = \frac{4Q_v}{\pi D^2}$.

41) Application numérique : évaluer le débit maximal $Q_{v_{\max}}$ et la valeur maximale de v_0 correspondante, notée $v_{0_{\max}}$, pour que l'écoulement de l'eau dans notre canalisation de diamètre D = 0,05 m reste laminaire. Conclure.

Ecoulement dans un canal, mesure de débit à l'aide d'un tube de Pitot.

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide assimilable à un fluide parfait, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans

le plan horizontal Oxy . Sa hauteur $h = 50$ cm est constante selon z . Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de $L_1 = 50$ cm à $L_2 = \frac{2}{3} L_1 = 33$ cm.

Etude qualitative :

La figure 2 représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement.

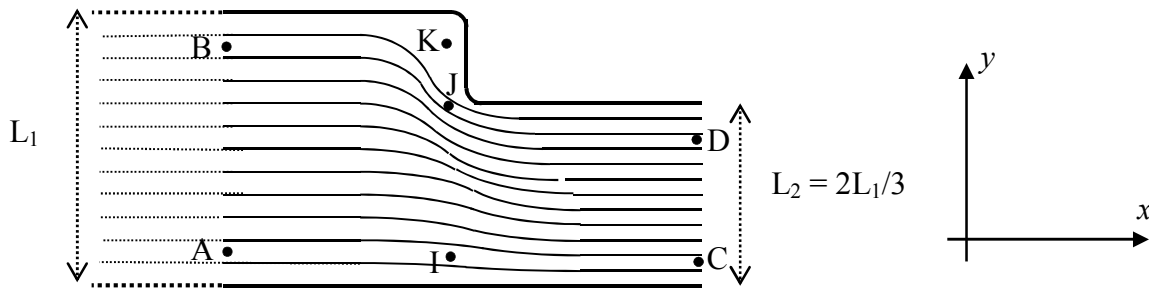


Figure 2

42) Au vu de la figure 2, comparer $v(J)$, $v(K)$, $v(A)$ et $v(C)$.

43) La vitesse au point A, mesurée par un tube de Pitot est de $0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse $v(C)$.

Etude quantitative : mesure au tube de Pitot (figure 3).

Le tube de Pitot, de diamètre $d = 1$ cm, est plongé dans le fluide en écoulement dont on veut évaluer la vitesse locale U . Il possède deux ouvertures. L'une, située au point M, est parallèle à l'écoulement du fluide. L'autre, située au point N, est perpendiculaire à cet écoulement. Par construction du capteur, les points M et N ont quasiment la même altitude. Ces deux ouvertures sont reliées par un tube vertical contenant un autre fluide, statique, plus dense, de masse volumique ρ_0 , de sorte qu'on puisse évaluer la différence de pression entre les points M et N, qui est une image de la vitesse U à déterminer.

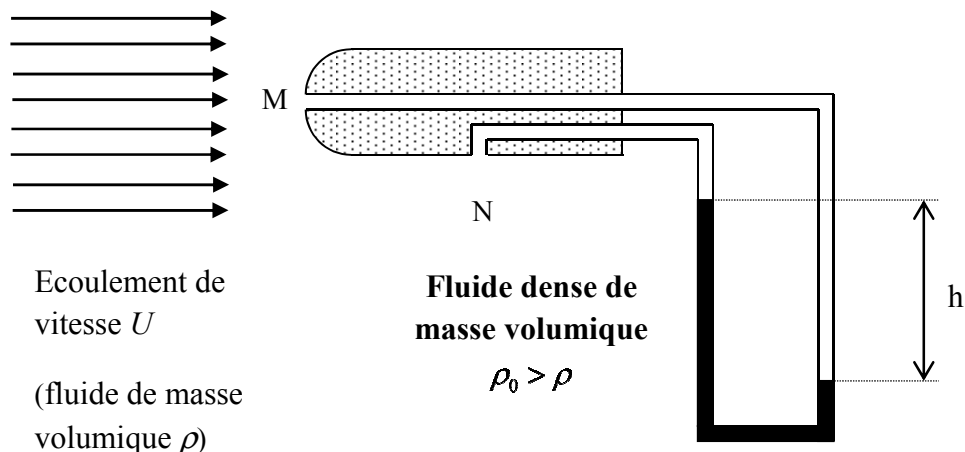


Figure 3

- 44) Rappeler l'équation de Bernoulli en précisant bien ses hypothèses d'application.
- 45) Que peut-on dire de la vitesse au point M, notée $v(M)$? En assimilant l'eau à un fluide parfait, en déduire la vitesse U de l'écoulement en fonction de la masse volumique ρ et de la différence de pression $\Delta P = P(M) - P(N)$ entre les points M et N.
- 46) Exprimer la différence de pression : $\Delta P = P(M) - P(N)$ en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .
- 47) En déduire l'expression de la vitesse U en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .
- 48) Calculer le nombre de Reynolds au niveau du tube de Pitot, situé à l'entrée du canal de largeur L_1 . Que pensez-vous de la validité de la mesure de la vitesse au point A ?

Débitmètre à effet Coriolis.

L'eau est un fluide abondant qui possède des propriétés thermodynamiques intéressantes. Sa forte capacité thermique massique et son aptitude aux changements d'états liquide-vapeur à des températures et pressions raisonnables font qu'elle est usuellement utilisée dans les turbines. Néanmoins, sa densité peut varier d'un facteur 1000 suivant qu'elle se trouve à l'état de vapeur ou de liquide. Le débit volumique n'est alors pas une grandeur pertinente pour un écoulement diphasique. Il convient donc de mesurer directement le débit massique.

Rappels sur les forces d'inertie :

Soit R un référentiel galiléen, auquel on associe le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. (O, x, y) correspond au plan horizontal, l'axe $(O, \vec{e}_z)$ est dirigé vers le haut.

On note R' le référentiel non galiléen, en rotation, par rapport à R , à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. On associe à R' le repère $(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$.

Une tige OA , infiniment rigide est mobile en rotation autour de l'axe $(O, \vec{e}_z)$. On repère sa position par l'angle : $\theta(t) = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OA}) = (\vec{e}_x, \vec{e}_{x'})$ (figure 4).

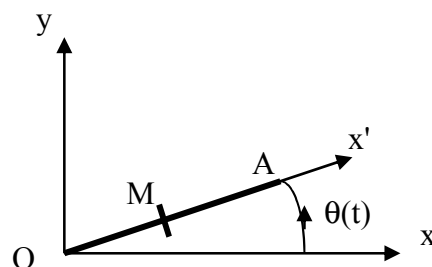


Figure 4

Une bille de masse m , supposée ponctuelle, repérée par sa position $\overrightarrow{OM} = X \vec{e}_{x'}$, est assujettie à se déplacer ou non le long de la tige.

- 49) La bille est collée sur la tige. X est alors constante. Déterminer la réaction $\vec{R}_1$ de la tige sur la bille en fonction de m , g , Ω et X .
- 50) La bille n'est plus collée, mais un dispositif extérieur, non représenté ici, impose à la bille un déplacement le long de l'axe Ox' à la vitesse constante : $\vec{v}' = v' \vec{e}_{x'}$, dans le référentiel R' . Déterminer la réaction $\vec{R}_2$ de la tige sur la bille en fonction de m , g , Ω , v' et X .

Débitmètre à tube oscillant :

Le débitmètre se compose d'un tube AB parcouru par un fluide à la vitesse $\vec{v}'$, nulle ou non. Les points A et B sont fixes dans le référentiel galiléen auquel on associe le repère $(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (figure 5).

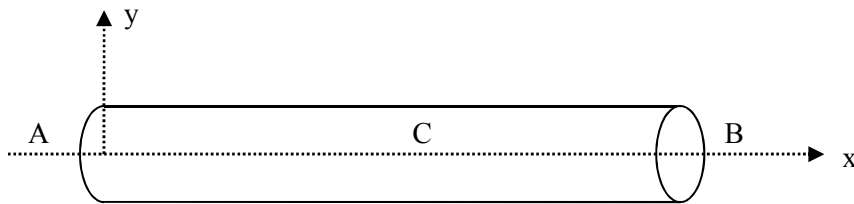


Figure 5

Le débitmètre est fixé en A, d'abscisse 0, et en B d'abscisse L . Une bobine excitatrice placée en C, milieu de $[A,B]$, peut soumettre le tube à des vibrations suivant $\vec{e}_y$.

Vibrations propres du tube à débit nul, en l'absence de la bobine excitatrice :

On supposera ici qu'il n'y a pas d'excitation en C et que le débit est nul. On a donc : $\vec{v}' = \vec{0}$.

On assimile le tube et le fluide qu'il contient à une corde, de masse linéique μ , tendue horizontalement avec une tension constante T_0 . Elle est fixée à ses deux extrémités en A et en B. On néglige l'effet de la pesanteur. A l'équilibre, la tige est horizontale.

On repère un élément infinitésimal de tige par sa position x . On néglige les déplacements de cet élément le long de l'axe Ox . On note $y(x,t)$ le petit déplacement suivant $\vec{e}_y$ de l'élément de tige situé à l'abscisse x à la date t . On a $y(0,t) = y(L,t) = 0$, pour tout t .

On note $\alpha(x,t)$ l'angle que fait la tangente au tube avec l'horizontale, au point d'abscisse x à la date t .

On considère α et y comme des infiniment petits de référence. On se limitera à une modélisation à l'ordre 1. On a donc : $\cos \alpha \approx 1$ et $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$.

- 51) On isole l'élément de tige situé entre x et $x + dx$. Il est soumis, de la part du reste de la tige, aux deux forces $\vec{T}_g(x, t)$ et $\vec{T}_d(x + dx, t)$, de module $T(x, t)$ et $T(x + dx, t)$ (figure 6).

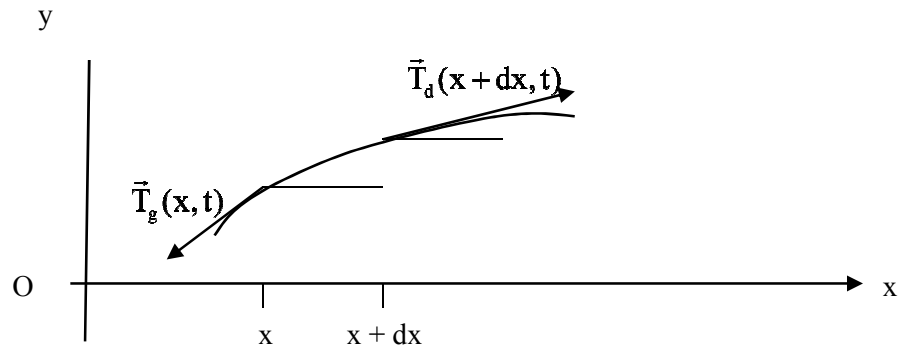


Figure 6

Par application du principe fondamental de la dynamique et en limitant les développements à l'ordre 1, montrer que :

a) $T(x + dx, t) = T(x, t) = T_0$, pour tout t ,

b) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$.

- 52) En déduire que $y(x, t)$ est solution de l'équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$.

- 53) Application numérique :

on donne $\rho = 150 \text{ g.m}^{-1}$, $T_0 = 200 \text{ N}$, déterminer la célérité c .

- 54) a) Qu'est-ce qu'une onde longitudinale ? Qu'est-ce qu'une onde transversale ? Donner un exemple d'observation de chacune d'elles.

b) Définir les termes : ondes stationnaires, ondes progressives. Pourquoi cherche-t-on ici des solutions d'ondes à variables séparées $y(x, t) = f(x).g(t)$?

- 55) L'expression d'une solution $y_n(x, t)$ correspondant au mode propre d'indice n est de la forme :

$$y_n(x, t) = (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \cdot \sin(k_n x).$$

a) Exprimer la longueur d'onde λ_n du mode propre d'indice n en fonction de L .

b) En déduire la pulsation ω_n du mode propre d'indice n en fonction de L et de c .

- 56) Ici, la solution générale de l'équation d'onde s'écrit sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \cdot \sin(k_n x)$$

De quoi dépendent les amplitudes a_n et b_n ?

Oscillations forcées par la bobine excitatrice du tube à débit nul :

- 57) Pour notre utilisation, on ne cherche à exciter que le mode propre $n = 1$ par la bobine excitatrice placée en C, milieu de [A,B]. Elle impose au point C un mouvement sinusoïdal :

$$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = y_{1\max} \sin(\omega_1 t).$$

Quelle est la valeur de la fréquence $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ d'alimentation de cette bobine excitatrice ?

Quelle est sa valeur numérique pour $L = 20 \text{ cm}$?

Le circuit qui alimente cette bobine a la structure d'un oscillateur quasi-sinusoïdal. Il se compose d'une chaîne directe assimilable à un amplificateur de tension et d'une chaîne de retour sélective en fréquence modélisée par le filtre suivant (figure 7).

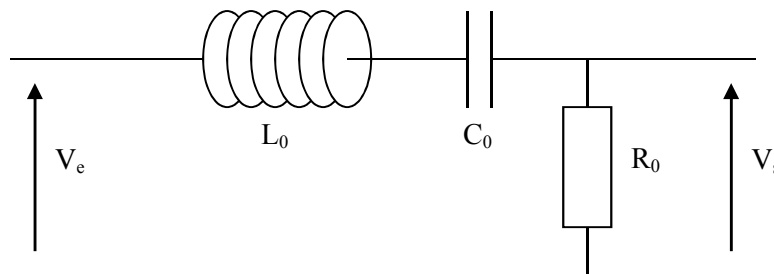


Figure 7

- 58) Etablir l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ en fonction de R_0 , L_0 , C_0 et ω . On admettra que le montage placé en aval de ce filtre a une impédance d'entrée infinie.

- 59) Ecrire cette fonction de transfert sous la forme canonique : $\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

On précisera les expressions de G_0 , Q et ω_0 , en fonction de R_0 , L_0 et de C_0 .

De quel type de filtre s'agit-il ?

- 60) Application numérique : on donne $L_0 = 140 \text{ mH}$.

- a) Quelle valeur de la capacité C_0 faut-il choisir pour sélectionner la fréquence de $f_1 = 90 \text{ Hz}$.
- b) Rappeler rapidement la relation qui existe entre la bande passante à -3 dB , la fréquence centrale et le facteur de qualité Q . Quelle valeur maximale de R_0 , notée $R_{0\max}$, garantit que la fréquence f_3 , du mode propre $n = 3$ du tube soit en dehors de la bande passante de ce filtre ?

61) La bobine impose toujours au point C un mouvement sinusoïdal tel que :

$$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = y_{\text{imax}} \sin(\omega_1 t).$$

A l'intérieur de l'oscillateur sinusoïdal, on a pris soin de choisir $R_0 < R_{0\text{max}}$.

a) Donner l'expression $y(x, t)$ du profil instantané du tube en fonction y_{imax} , ω_1 , x , t et L .

b) Représenter, sur quatre figures différentes, le profil du tube aux quatre dates :

$$t_1 = 0, t_3 = \frac{T}{4}, t_5 = \frac{T}{2} \text{ et } t_6 = \frac{3T}{4}, \text{ où } T \text{ est la période temporelle des oscillations.}$$

Oscillations forcées par la bobine excitatrice du tube à débit non nul :

On suppose maintenant que le tube est parcouru par le fluide en écoulement permanent, dans le référentiel lié localement au tube, à la vitesse $\vec{v}' = v' \vec{t}(x, t)$, où $\vec{t}(x, t)$ est le vecteur tangent à l'élément de tube situé en x à la date t . De par les vibrations imposées par la bobine excitatrice, le référentiel lié au tube n'est plus assimilable à un référentiel galiléen. On admettra que l'élément de tube situé entre les abscisses x et $x + dx$ est toujours soumis aux deux forces $\vec{T}_g(x, t)$ et $\vec{T}_d(x + dx, t)$ de module T_0 auxquelles s'ajoute la force élémentaire d'inertie de Coriolis :

$$d\vec{F}_{ic} = -2\mu dx \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) \vec{e}_z \right] \wedge [v' \vec{t}(x, t)],$$

où $y(x, t)$ correspond approximativement au profil du tube établi à la question précédente.

62) A quoi correspond le vecteur $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) \vec{e}_z$? Déterminer, en faisant une hypothèse que vous préciserez, l'expression de la force élémentaire d'inertie de Coriolis $d\vec{F}_{ic}(x, t)$, dans la base orthonormale directe locale $(\vec{t}(x, t), \vec{n}(x, t), \vec{e}_z)$.

63) Compte-tenu de cette contrainte supplémentaire, le profil du tube, toujours fixe en A et B, est alors légèrement modifié. Schématiser, sur quatre figures différentes, le nouveau profil approximatif du tube tenant compte de la déformation supplémentaire liée aux forces de Coriolis, aux dates $t_2, t_3 = \frac{T}{4}, t_4$ et $t_6 = \frac{3T}{4}$, avec $t_2 \in \left] 0, \frac{T}{4} \right[$ et $t_4 \in \left] \frac{T}{4}, \frac{T}{2} \right[$.

64) A débit non nul, il y a un déphasage temporel entre les déplacements enregistrés en $x = L/4$ et $x = 3L/4$. Une étude approfondie permet de montrer que ce déphasage est proportionnel au débit massique du fluide en écoulement. En pratique, le coefficient de proportionnalité entre le déphasage et le débit massique n'est pas obtenu par une étude fine des vibrations du tube mais sa détermination repose sur une démarche expérimentale préalable au cours de laquelle on mesure le déphasage pour un débit massique connu. Comment nomme-t-on une telle démarche ? L'avez-vous déjà pratiquée ? Si oui, avec quel appareil de mesure ?

Données numériques et constantes physiques :

Masse volumique de l'eau liquide : 10^3 kg.m^{-3} .

Viscosité de l'eau liquide : $1,7.10^{-3} \text{ Pa.s}$.

Paramètre de maille de la glace 1_c : $a = 637 \text{ pm}$.

Plus petite distance O-H pour la glace 1_c : $d_1 = 98 \text{ pm}$.

Nombre d'Avogadro : $N_a = 6,023.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

On donne à 298 K : $\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) = -241,8 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

$S^\circ(\text{H}_{2(g)}) = 130,5 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

$S^\circ(\text{O}_{2(g)}) = 205 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

$S^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) = 188,5 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Potentieux standards à 298 K :

$E^\circ(\text{I}_{2(aq)}/\text{I}) = 0,62 \text{ V}$, $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$.

$E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$, $E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$.

On prendra : $\frac{RT \ln(x)}{F} = 0,06 \log(x)$

Masse molaire du chlorure de manganèse ($\text{MnCl}_2, 4\text{H}_2\text{O}$) : 198 g.mol^{-1} .

Masse molaire de l'iodure de potassium KI : 166 g.mol^{-1} .

Quelques ordres de grandeurs :

Valeur critique du nombre de Reynolds : 2300.

Débit maximal d'une canalisation domestique : $5 \text{ m}^3/\text{h}$.

Débit usuel d'une canalisation d'eau domestique : 200 L/h .

Point triple de l'eau : 0°C , $P = 611 \text{ Pa}$.

Point critique de l'eau : 374°C , $P = 2,18.10^{10} \text{ Pa}$.

Température et pression moyennes de quelques planètes :

Mercure : $\theta = 170^\circ\text{C}$, $P = 10^{-7} \text{ Pa}$.

Venus : $\theta = 470^\circ\text{C}$, $P = 9.10^6 \text{ Pa}$.

Mars : $\theta = -40^\circ\text{C}$, $P = 800 \text{ Pa}$.

Terre : $\theta = 15^\circ\text{C}$, $P = 10^5 \text{ Pa}$.

Jupiter : $\theta = -161^\circ\text{C}$, $P = 10^6 \text{ Pa}$.

Saturne : $\theta = -189^\circ\text{C}$ pour $P = 10^6 \text{ Pa}$, $\theta = -139^\circ\text{C}$ pour $P = 10^7 \text{ Pa}$.

Neptune : $\theta = -218^\circ\text{C}$ pour $P = 10^6 \text{ Pa}$, $\theta = -201^\circ\text{C}$ pour $P = 10^7 \text{ Pa}$.

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial (a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial (a_r)}{\partial z} - \frac{\partial (a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{a} = \left(\Delta a_r - \frac{1}{r^2} (a_r + 2 \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_r + \left(\Delta a_\theta - \frac{1}{r^2} (a_\theta - 2 \frac{\partial a_r}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_\theta + (\Delta a_z) \vec{u}_z$$

$$\text{rot}[\text{rot}(\vec{a})] = \text{grad}[\text{div}(\vec{a})] - \Delta \vec{a} .$$

PROBLÈME II (CCP)

Procédés physiques de transmission d'un signal

Dans ce problème, on se propose d'étudier et de comparer le câble coaxial et la fibre optique comme supports de distribution de signaux. La **partie I** traite du câble coaxial. Dans la sous-partie **I.1**, on le supposera parfait, tandis que la sous-partie **I.2** visera à en affiner la modélisation. La **partie II** traite de la fibre optique. Après avoir rappelé quelques résultats généraux d'optique géométrique dans la sous-partie **II.1**, on détaillera la propagation des rayons dans la fibre à saut d'indice (sous-partie **II.2**) puis dans la fibre optique à gradient d'indice (sous-partie **II.3**), ce qui nous conduira à analyser une technique d'augmentation de la capacité de transmission : le multiplexage (sous-partie **II.4**). La sous-partie **II.5** est consacrée aux pertes associées à l'usage de la fibre optique.

Partie I – Le câble coaxial

Un câble coaxial, représenté en **figure 1**, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon a , appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur b . Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. À l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.

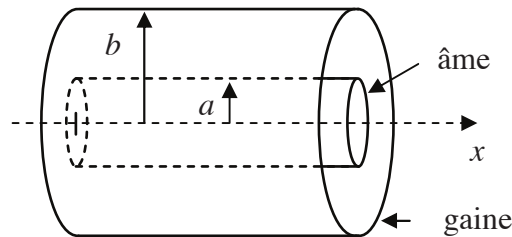


Figure 1 – Structure d'un câble coaxial

On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement Λ et Γ les inductance et capacité par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur dx , considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance $dL = \Lambda \cdot dx$ et une capacité $dC = \Gamma \cdot dx$. Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur dx est représenté en **figure 2**. Dans ce modèle, on néglige toute perte résistive. On note $i(x, t)$ et $i(x + dx, t)$ les intensités des courants dans la ligne, à l'instant t , aux abscisses respectives x et $x + dx$. On note $u(x, t)$ et $u(x + dx, t)$ les tensions entre l'âme et la gaine, à l'instant t , aux abscisses respectives x et $x + dx$. Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence f .

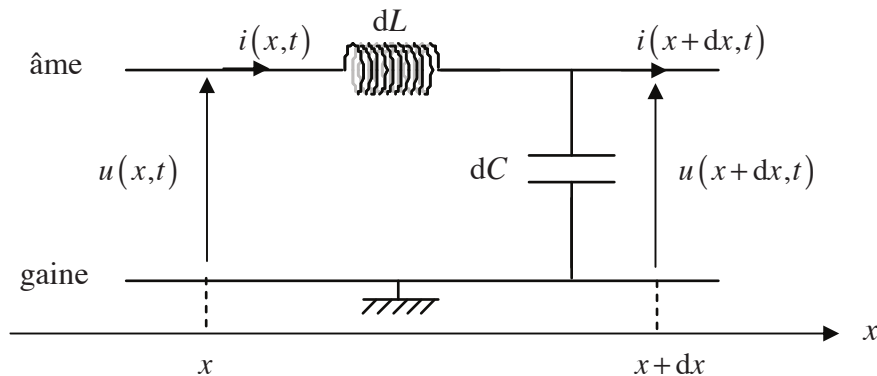


Figure 2 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur dx

I.1 – Le câble coaxial parfait

Q1. Comment le courant circulant dans l'âme revient-il jusqu'au générateur de tension ?

Q2. Démontrer que les deux équations différentielles couplées sur u et i sont :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Vous considérerez, notamment, que : $\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ à l'ordre 0 en dx .

Par ailleurs, on rappelle que, puisque dx tend vers zéro, nous avons les relations suivantes :

$$u(x+dx,t) - u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad i(x+dx,t) - i(x,t) = \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \cdot dx.$$

Q3. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ obéissent à deux équations de propagation de D'Alembert.

En déduire l'expression de la vitesse de propagation v des signaux dans la ligne en fonction de Λ et Γ . Vérifier sa dimension.

Q4. On étudie les solutions des équations de D'Alembert en régime permanent sinusoïdal. La tension $u(x,t)$ correspond à la partie réelle de la tension complexe $\underline{u}(x,t)$. L'intensité $i(x,t)$ correspond à la partie réelle de l'intensité complexe $\underline{i}(x,t)$. On propose, avec j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, des solutions complexes des équations de propagation de la forme :

$$\underline{u}(x,t) = \rho \cdot i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) - \rho \cdot i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x))$$

et

$$\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - k \cdot x)) + i_1 \cdot \exp(j(\omega \cdot t + k \cdot x)).$$

Vérifier que $\underline{u}(x,t)$ est compatible avec l'équation trouvée à la question **Q3**, à une condition sur v , ω et k qu'on explicitera.

Donner une interprétation physique de chacun des deux termes présents dans les expressions de $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$.

Pour la suite, nous considérerons toujours i_0 non nul.

Q5. Donner l'expression de ρ en fonction de l'impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

Préciser son unité.

Q6. L'extrémité du câble, de longueur d , est fermée sur une impédance $\underline{Z}$. Exprimer i_1 en fonction de : i_0 , $\underline{Z}$, ρ , k et d .

Q7. L'impédance totale de la ligne vue depuis l'abscisse x , notée $\underline{Z}_l(x)$, a pour expression :

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}.$$

Donner l'expression de $\underline{Z}_l(x)$ en fonction de : $\underline{Z}$, ρ , k , d et x . À quelle

condition sur $\underline{Z}$, l'impédance $\underline{Z}_l(x)$ est indépendante de l'abscisse x ? Quelle est alors l'expression de $\underline{Z}_l(x)$? Que dire dans ce cas de i_1 et que peut-on alors conclure ?

Quelle impédance mettre en bout de câble pour s'assurer, dans le cadre des télécommunications, que la puissance transmise est optimale ?

I.2 – Le câble coaxial avec pertes

La modélisation précédente ne décrit qu'imparfaitement la propagation du signal. Aussi on se propose d'étudier le modèle représenté en **figure 3** dans lequel on a inséré une résistance $dR = r \cdot dx$ par rapport au modèle de la **figure 2** de la page 2.

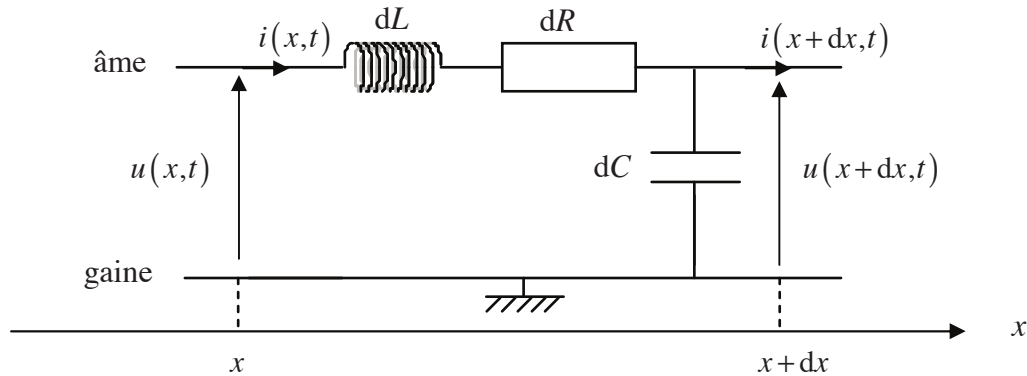


Figure 3 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfaite de longueur dx

Q8. Quelle est l'origine physique de la résistance dR ?

Q9. Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension $u(x,t)$ est :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + r \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Q10. En considérant une solution de la forme $\underline{u}(x,t) = u_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$ à l'équation de propagation précédente, dans laquelle $\underline{k}$ est une pulsation spatiale complexe, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.

Q11. On écrit $\underline{k}$ sous la forme : $\underline{k} = \alpha - j \cdot \beta$. Que représentent physiquement α et β ? Justifier, par un raisonnement physique, le signe de β lorsque $\alpha > 0$.

Q12. On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en $x = 0$ et un point d'abscisse x par la grandeur A , exprimée en décibel par unité de

longueur,
$$A = \frac{10 \cdot \log\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x} = \frac{\frac{10}{\ln 10} \cdot \ln\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)}{x}, \text{ avec } P(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}(x,t) \cdot \underline{i}^*(x,t))$$
 la

puissance moyenne de l'onde à l'abscisse x et $P_0 = P(x=0) = \frac{1}{2} u_0 \cdot i_0$ la puissance moyenne de l'onde en entrée du câble.

En considérant que $\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$, exprimer A en fonction de β .

Q13. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, montrer que si $r \ll \Lambda \cdot \omega$, alors

$$A = \frac{10}{\ln 10} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

Q14. Par ailleurs, on montre que, lorsque $r \gg \Lambda \cdot \omega$, l'atténuation linéique de puissance a pour expression : $A = \frac{10}{\ln 10} \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \Gamma \cdot \omega}$. Ainsi, au vu de cette équation et de celle de la question

Q13, il semble que l'atténuation linéique de puissance progresse avec la fréquence puis devienne indépendante de celle-ci lorsque les effets inductifs prennent le pas sur les effets résistifs. Mais, en réalité, à cause d'un phénomène physique associé à la résistance r , en haute fréquence, r augmente avec la racine carrée de la fréquence. Nommer et expliquer ce phénomène.