
DS 4

Mécanique

Vendredi 11 décembre 2020

Problème I : Autour de la luge (ATS)

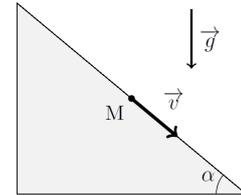
La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km h^{-1} .

A - Étude des trajectoires

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble luge+lugeur (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100 \text{ kg}$. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Descente rectiligne

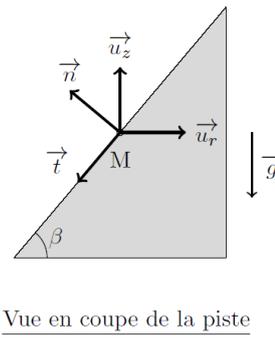
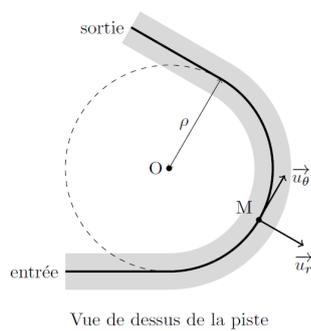
Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5,0 \text{ m s}^{-1}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10 % (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.



1. Effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces.
2. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer puis calculer numériquement l'accélération a de la luge en fonction de g et α .
3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $v_a = 30 \text{ m s}^{-1}$? Faire l'application numérique.
4. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Faire l'application numérique.

Virage circulaire

À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V , sur un cercle de rayon ρ . La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\vec{v} = V\vec{u}_\theta$. Le trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct. On désigne par $\vec{R} = R_N\vec{n} + R_T\vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires normal \vec{n} et tangent \vec{t} sont définis sur la figure ci-dessous (à droite) :



5. Exprimer l'accélération \vec{a} en fonction de ρ , V et \vec{u}_r . Justifier physiquement le sens de l'accélération.
6. La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère (\vec{t}, \vec{n}) .
7. En déduire les expressions des composantes R_N et R_T de la réaction du support en fonction de V , ρ , g , β et m .
8. Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle? Écrire alors R_T en fonction de m , ρ , β et $(V^2 - V_c^2)$.

Soit $f = 0,4$ le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_T| < f|R_N|$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V \geq V_c$, ce qui correspond à un dérapage possible dans le virage.

9. Montrer que V^2 doit vérifier l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2(\cos \beta - f \sin \beta) \leq g\rho(\sin \beta + f \cos \beta)$$

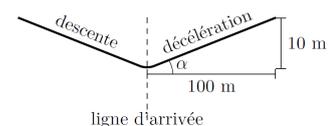
10. En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais de dérapage, quelle que soit la vitesse V . Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f . Faire l'application numérique, en degrés.
11. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g , ρ , β et f . Que risque la luge si la vitesse est trop grande?
12. Montrer, à partir des résultats précédents, qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c . Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

B - Dispositifs de freinage mécanique

La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse $v_a = 30 \text{ m s}^{-1}$.

Dans cette partie, les frottements solides (et fluides) sont négligés devant les autres forces en jeu.

Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10 % (on monte verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note α l'angle d'inclinaison.



13. Déterminer la longueur L_0 de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de $v_a = 30 \text{ m s}^{-1}$ à l'arrêt, en utilisant une approche énergétique. Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.

Problème II : Sismographe horizontal (CCP)

A - Référentiels non galiléens

Soit un référentiel $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{e}_{x,1}, \vec{e}_{y,1}, \vec{e}_{z,1})$ de base orthonormée et un référentiel $\mathcal{R}_2 = (O_2, \vec{e}_{x,2}, \vec{e}_{y,2}, \vec{e}_{z,2})$. Ces deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre. On étudie le mouvement d'un point matériel M , de masse m dans ces deux référentiels.

1. Comment le fait que les deux référentiels sont en translation se traduit-il sur les vecteurs de base?

Déterminer le lien entre la vitesse \vec{V}_1 de M calculée dans \mathcal{R}_1 et la vitesse \vec{V}_2 de M calculée dans \mathcal{R}_2 . On fera intervenir la vitesse de O_2 par rapport à \mathcal{R}_1 , notée $\vec{v}(O_2/\mathcal{R}_1)$.

En déduire le lien entre les accélérations \vec{a}_1 de M calculée dans \mathcal{R}_1 et \vec{a}_2 de M calculée dans \mathcal{R}_2 . On fera intervenir l'accélération de O_2 par rapport à \mathcal{R}_1 , notée $\vec{a}(O_2/\mathcal{R}_1)$.

2. À quelle condition les deux accélérations \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont-elles égales? Quel est alors le mouvement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 ?
3. On suppose que le référentiel \mathcal{R}_1 est galiléen. Que signifie cette définition? Donner, en les commentant, quelques exemples de référentiels considérés usuellement comme galiléens. Montrer que dans le cas de la question précédente, si \mathcal{R}_1 est galiléen, alors \mathcal{R}_2 est aussi galiléen.
4. On suppose toujours que \mathcal{R}_1 est galiléen, mais la condition de la question 2. n'est pas remplie. Soit \vec{F} la résultante des forces s'appliquant au point M .

Quelle est la relation entre \vec{F} , m et \vec{a}_1 ?

Comment cette relation est-elle modifiée quand on travaille dans le référentiel \mathcal{R}_2 , non galiléen? On précisera le nom des nouvelles grandeurs éventuelles qui apparaissent.

B - Fabrication d'un sismographe horizontal

Lors d'un tremblement de terre, les vibrations du sol font que le référentiel qui lui est lié n'est plus galiléen le temps de la secousse sismique. On peut donc détecter les vibrations du sol par les effets non galiléens qui sont engendrés.

Pour cela on considère une barre homogène, de masse m et de longueur L , de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à une de ses extrémités. Cette barre est liée en O à un bâti solidaire du sol :

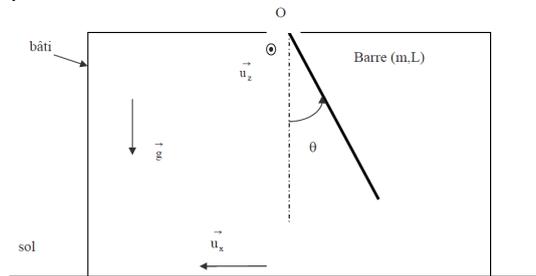


Figure 1 : Principe du sismographe.

Le mouvement (supposé plan) de la barre autour de l'axe (O, \vec{u}_z) est repéré par l'angle θ que fait la barre avec la verticale, \vec{u}_z étant un vecteur unitaire venant vers le lecteur (cf schéma). La liaison en O de la barre et de la partie haute du bâti est supposée parfaite. Les oscillations de la barre sont freinées par un dispositif non représenté qui exerce un moment en O , résistant au mouvement, d'expression $\vec{M}_f = -\alpha \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$, α étant une constante positive.

Le bâti du sismographe est solidaire du sol.

On suppose tout d'abord que le sol ne vibre pas

5. Faire un bilan des actions mécanique s'exerçant sur la barre et calculer le moment en O de chacune de ces actions.

Montrer que, quand le sol ne vibre pas, l'angle θ est nul à l'équilibre.

6. On écarte cette barre de sa position d'équilibre ($\theta_{eq} = 0$) et on la lâche sans vitesse initiale depuis une position repérée par l'angle $\theta = \theta_0$ (supposé petit).

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ lors du mouvement de la barre en utilisant le théorème du moment cinétique, dans l'approximation des petits angles. Retrouver le résultat précédent en faisant une analyse énergétique du problème.

7. Déterminer les relations reliant α , m , L et g pour que le mouvement soit pseudo-périodique, critique ou apériodique.

Pour l'utilisation de ce dispositif en sismographe, on essaie de se placer en régime critique. Expliquer l'intérêt de ce choix.

On suppose maintenant que le sol vibre horizontalement.

La vibration est caractérisée par une accélération horizontale du sol $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$, \vec{u}_x étant un vecteur unitaire horizontal dirigé vers la gauche (voir figure).

Lors de la vibration du sol, on peut étudier le mouvement de la barre par rapport au bâti en utilisant les forces d'inertie.

8. En supposant que la force d'inertie ressentie par la barre est la même que si toute sa masse était concentrée en son milieu, calculer le moment M_{ie} des forces d'inertie par rapport à l'axe de rotation.
9. En tenant compte de toutes les actions mécaniques appliquées à la barre dans le référentiel non galiléen lié au bâti, et en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation, montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ s'écrit :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mgL \sin \theta - \alpha\dot{\theta} + \frac{1}{2}mLa(t) \cos \theta$$

En déduire, en fonction de a et g , la nouvelle position d'équilibre de la barre par rapport au bâti, dans le cas où a est constante.

L'hypothèse a constante n'est pas réaliste dans le cas d'un séisme.

On va donc envisager un cas plus réaliste d'ondes sismiques pour lesquelles $a(t) = a_0 \cos \omega t$, où a_0 et ω sont des constantes.

On utilisera la notation complexe $\underline{a} = a_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{\theta} = \theta_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$.

10. Déterminer, dans le cas des petites oscillations, l'amplitude θ_0 des oscillations forcées du sismographe en fonction de a_0 , ω , m , L , α et g puis en fonction de a_0 , ω , m , L et g (on rappelle qu'on est en régime critique). Déterminer également la phase φ en fonction des mêmes paramètres.
11. Représenter l'allure générale de l'amplitude θ_0 en fonction de la pulsation ω .
12. On considère des ondes sismiques de fréquence très faible. Montrer que θ_0 est alors proportionnel à l'amplitude de l'accélération a_0 du sol. Quel est le coefficient de proportionnalité? Quelle(s) condition(s) doit vérifier ω pour que l'hypothèse soit valable?
13. On considère des ondes sismiques de fréquence très élevée. Montrer que θ_0 est alors proportionnel à l'amplitude du déplacement du sol. Quel est le coefficient de proportionnalité? Quelle(s) condition(s) doit vérifier ω pour que l'hypothèse soit valable?

Problème III : Evolution du concept d'atome (CCP)

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Electronvolt	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Partie I - Limite du modèle de *J. J. Thomson* à travers l'expérience de *E. Rutherford*

En 1898, *J. J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car *J. J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^4_2\text{He}$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de *J. J. Thomson*, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

Q1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par *J. J. Thomson* est incompatible avec les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de *J. Perrin*, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O , origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Nous considérons qu'à l'instant initial $t = 0$ s, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2.e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \vec{e}_x$. On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (**figure 1**). À chaque instant t , on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O . La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\vec{OM}(t) = d(t) \cdot \vec{e}_r$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O , la particule alpha est au point S , la distance minimale en ce point est notée d_m . La particule alpha est non relativiste. L'expérience a été réalisée sous très faible pression.

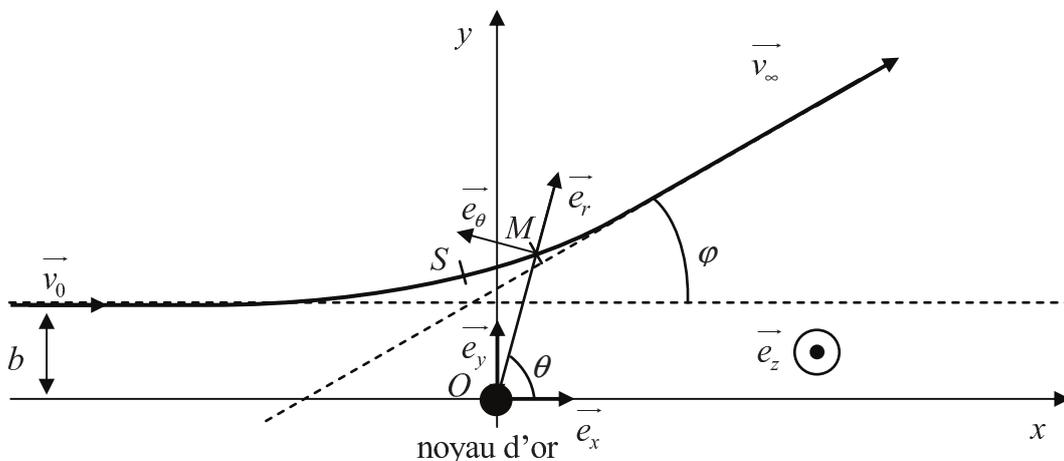


Figure 1 – Expérience de *Ernest Rutherford*

Q2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e, Z, d, ϵ_0 et \vec{e}_r . Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim_{d \rightarrow +\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e, Z, d et ϵ_0 . Réécrire ces deux expressions en fonction de

$$K = \frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \text{ et } d.$$

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique \vec{L}_O par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

- Q3.** Déterminer, en fonction de m_α et v_0 , l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.
- Q4.** Exprimer le moment cinétique \vec{L}_O , en fonction de b , m_α , v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Pour cela, vous pourrez calculer \vec{L}_O en M_0 , position initiale de la particule alpha telle que $\vec{OM}_0 = X \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y$.

- Q5.** Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique \vec{L}_O en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, m_α , d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

En déduire une relation entre d , b , $\dot{\theta}$ et v_0 .

- Q6.** Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse \vec{v}_S , de norme v_S , de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur \vec{OS} , de norme d_m . Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K , b , m_α et v_0 .

- Q7.** Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b . Pour cela, vous écrirez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K , d , m_α , \vec{v} et \vec{e}_r . Projeter le P.F.D. sur l'axe des x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x , et l'angle θ (**figure 1**, page 3).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x , θ , $\dot{\theta}$, K , b , m_α et v_0 .

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. On remarquera que $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ à b est : $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{b \cdot m_\alpha \cdot v_0^2}$.

On rappelle que : $\cos \varphi - 1 = -2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin \varphi = 2 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

- Q8.** À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure à la dimension de ce noyau.

- Q9.** Montrer que la relation qui lie d_m à φ est : $d_m = \frac{K}{m_\alpha \cdot v_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

- Q10.** Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ , la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K , m_α et v_0 .

Q11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau.

Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m .

Q12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Partie II - Limite du modèle planétaire

Le modèle de *J. J. Thomson* est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique.

Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_e et de charge électrique $q_e = -e$, qui tourne autour de son noyau, un proton de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (**figure 2**). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C . Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C .

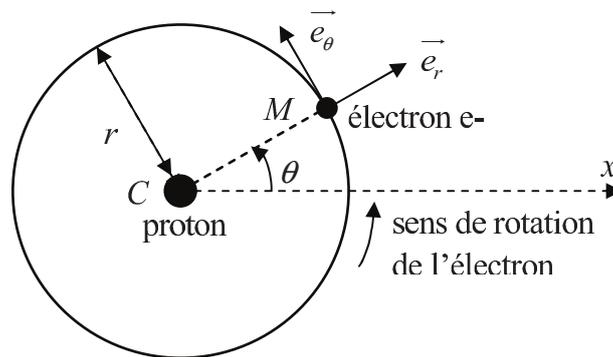


Figure 2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ (**figure 2**). \vec{e}_θ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\overline{CM} = r \cdot \vec{e}_r$ et l'angle $\theta = (\overline{Cx}, \overline{CM})$.

Q13. Déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v} de l'électron en fonction de e , m_e , ϵ_0 , r et d'un vecteur unitaire.

Q14. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A \cdot f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e , ϵ_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.

Q15. Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 \cdot e^2 \cdot r^2}{12 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \cdot \frac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

Q16. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$.

Q17. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R . Donner l'expression, en fonction de P_0 , R et A , du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau.

On donne $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer t_f . Commenter le résultat obtenu.

Partie III - Postulats de *N. Bohr*

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par *Niels Bohr*. En 1913, ce dernier postule, d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique) et, d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre de l'atome

$$L = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

où n est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.

Vous considérez qu'un électron sur une orbite de rayon r possède une vitesse $v = \frac{e}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot r}}$

et une énergie mécanique $E_M = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$.

Q18. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 \cdot n^2$.

Préciser l'expression de r_0 en fonction de ϵ_0 , h , m_e et e . Calculer la valeur de r_0 .

Q19. En traduisant le fait que l'onde de matière associée à l'électron doit interférer constructivement avec elle-même après un tour sur son orbite, établir une relation entre la longueur d'onde de *De Broglie* de l'électron λ et le périmètre \mathcal{P} de son orbite.

Montrer qu'on retrouve alors le postulat mécanique de *N. Bohr*.

- Q20.** Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$.
Préciser l'expression de E_0 en fonction de ϵ_0 , h , m_e et e . Calculer, en électronvolt, la valeur de E_0 . Que représente physiquement E_0 ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

- Q21.** Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de *Rydberg - Ritz* :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right] \text{ avec } n_i > n_f. R_H \text{ est la constante de Rydberg.}$$

Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0 , h et c . Indiquer sa valeur et son unité.

- Q22.** Les raies de la série de *Lyman* sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ($n_f = 1$). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121,5 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 102,5 \text{ nm}$; $\lambda_3 = 97,2 \text{ nm}$.
À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ?
Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de *Rydberg*. Conclure.

