TD 12

Cinématique des fluides

Questions de cours

— Définir une particule de fluide.
— Quel est l'ordre de grandeur du nombre de particules dans une particule de fluide ?
— Décrire l'approche eulérienne, l'approche lagrangienne
— Définir une ligne de courant, un tube de courant, une trajectoire
— Quelle est la condition limite sur la vitesse au contact d'une paroi ?
— Définir la dérivée particulaire, l'appliquer à la vitesse et à la masse volumique
— Donner l'expression détaillée de l'accélération convective en repère cartésien.
— Définir les débits massique et volumique
— Démontrer l'équation de conservation de la masse
— Donner les deux expressions de l'équation de conservation de la masse
— Que signifie qu'un écoulement est incompressible ?
— Donner en cartésien l'expression de la divergence, du gradient, du rotationnel et du Δ
— Démontrer la conservation du débit massique pour un écoulement stationnaire
— Démontrer la conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible
— Définir le vecteur tourbillon.
— Que signifie qu'un écoulement est irrotationnel ?
— Citer le théorème de Green-Stokes
— Donner les deux relations entre opérateurs concernant le rotationnel

Applications directes du cours

Exercice 1 - Caractéristiques d'un écoulement - ♥♥♥ / ★

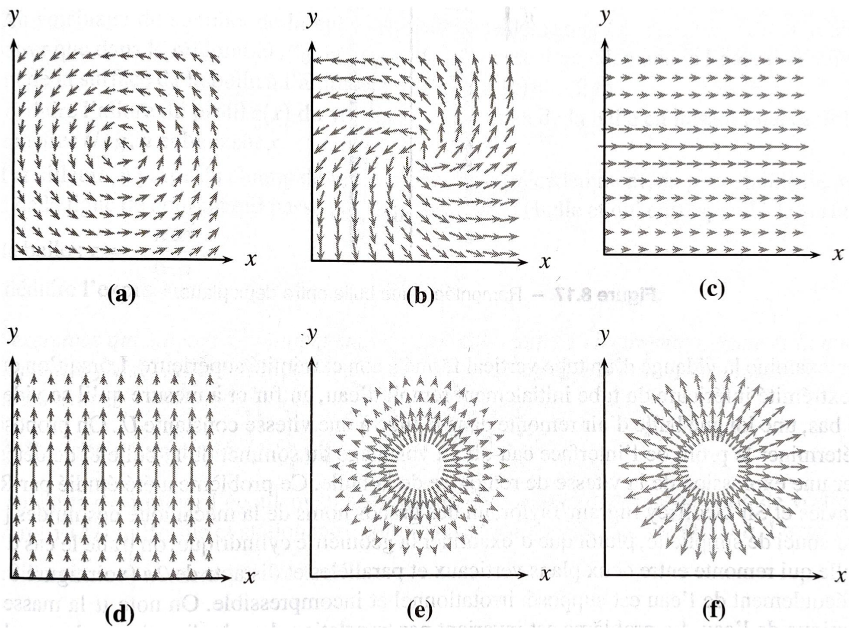
On considère un écoulement dont le champ de vitesse eulérien est :

$$\overrightarrow{v}(M,t) = -\Omega y\overrightarrow{u_x} + \Omega x\overrightarrow{e_y} + v_0\overrightarrow{u_z}$$

1. Cet écoulement est-il :
   (a) Stationnaire ?
   (b) Incompressible ?
   (c) Irrotationnel ?
2. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

Exercice 2 - Analyse de carte de champ - ♥♥♥ / ★

Chaque figure ci dessous représente la carte de champ d'un écoulement stationnaire et bidimensionnel. Ces écoulements, sont-ils irrotationnels ou tourbillonnaires ? Le cas échéant, indiquer l'orientation du vecteur tourbillon. Que peut-on dire de l'incompressibilité ?



Exercice 3 - Tornade - ♥♥ / ★★

Le champ de vitesses au sein d'une tornade peut-être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par :

$$\overrightarrow{v}(r) = \begin{cases} \omega r \overrightarrow{e_\theta} & si \quad r \leq a \\ \dfrac{K}{r}\overrightarrow{e_\theta} & si \quad r \geq a \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes.

1. Sachant que le champ des vitesses ne présente pas de discontinuité, déterminer K.
2. Représenter le champ des vitesses en traçant la fonction $v(r)$ puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.
3. Montrer que l'écoulement de l'air est incompressible.
4. Cet écoulement est-il tourbillonnaire ?

Données : En coordonnées sphériques et pour une champ $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}(r)$ ne dépendant que de r :

$$div\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_z}$$

Approfondissement

Exercice 4 - Sténose artérielle - ♥♥♥ / ★★

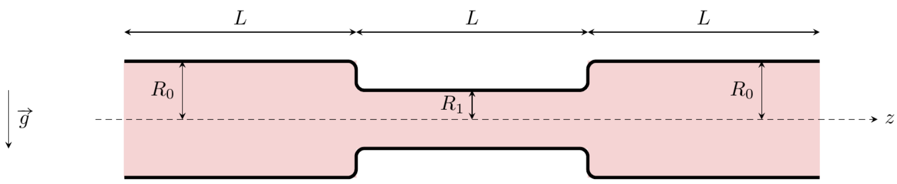
On étudie la circulation sanguine dans une artère, modélisée par un écoulement stationnaire dans un cylindre de longueur $L_0 = 7\ cm$ et de rayon $R_0 = 0,7\ cm$. Le sang est modélisé par un fluide newtonien de viscosité $\eta = 6.10^{-3}\ Pa.s$. L'écoulement au sein de l'artère a un profil de type Poiseuille : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{v} = \frac{\Delta P R_0^2}{4\eta L_0}(1 - ar^2)\overrightarrow{e_z}$$

où ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités de l'artère. Sa vitesse débitante vaut $U = 10\ cm.s^{-1}$.

1. Déterminer a
2. En déduire la valeur de ΔP. Quel mécanisme biologique est à l'origine de cette différence de pression ?
3. On définit la résistance hydraulique de l'artère à partir de la différence de pression et du débit volumique D_v par $R_H = \frac{\Delta P}{D_v}$. Justifier cette dénomination par analogie avec d'autres phénomènes connus, puis exprimer R_H en fonction des données du problème.

   On s'intéresse à une sténose artérielle, dont l'effet est de réduire le rayon de l'artère. On la modélise par la configuration de la figure 1, en prenant $R_1 = \frac{R_0}{2}$.



4. Déterminer les expressions des résistances hydrauliques R_H d'une section saine de longueur L et R'_H de la portion sténosée. Montrer que la résistance hydraulique de l'artère complète $R_{H,st} = 2R_H + R'_H$ et la calculer en fonction des paramètres physiques. Quel qualificatif donner à cette configuration ?
5. Comparer les débits volumiques avec et sans sténose pour l'artère étudiée. Commenter.

   Un pontage artériel consiste à créer un écoulement parallèle de la sténose en utilisant une tubulure de rayon R_2 et de même longueur $3L$ que la sténose afin de retrouver le débit initial.

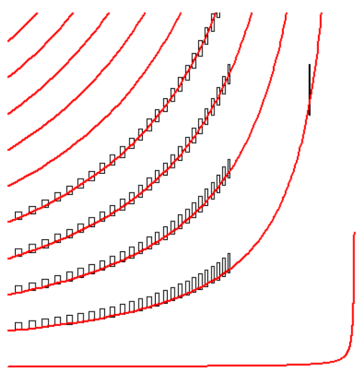
6. En déduire le rayon R_2 nécessaire pour réaliser ce pontage.

Exercice 5 - Modélisation d'un écoulement contre une paroi- ♥♥♥ / ★★★

L'écoulement d'un fluide entre deux solides formant un angle droit a pour champ de vitesses, défini dans la région $x < 0$ et $y > 0$:

$$\overrightarrow{v}(r,t) = -kx\ \overrightarrow{u_x} + ky\ \overrightarrow{u_y}$$

Ci-contre sont représentées en trait rouge quelques lignes de courant, ainsi que l'évolution des particules de fluides (formes noires).

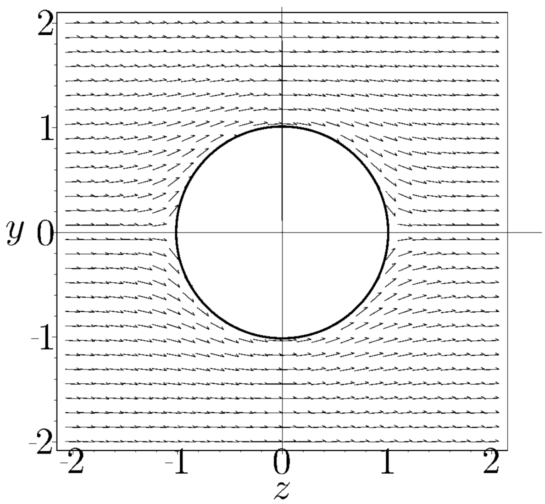


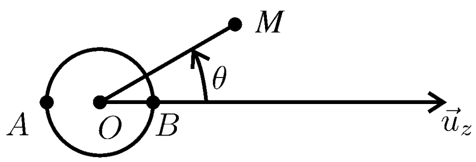
1. Déterminer l'équation des lignes de courant. Les conditions aux limites sont-elles bien vérifiées ?

2. Ce champ de vitesses correspond-il à un écoulement :
   (a) incompressible ?
   (b) irrotationnel ?
3. Si oui, déterminer le potentiel des vitesses
4. Déterminer l'accélération d'une particule :
   (a) En formalisme lagrangien (commencer par déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$)
   (b) En formalisme eulérien

Exercice 6 - Écoulement perturbé par une sphère - ♥ / ★★

On considère un écoulement permanent uniforme $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_z}$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R. On considère que l'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel. Le champ des vitesses ainsi obtenu est représenté sur la figure ci dessous :

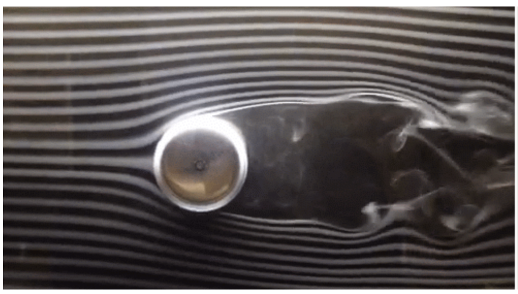


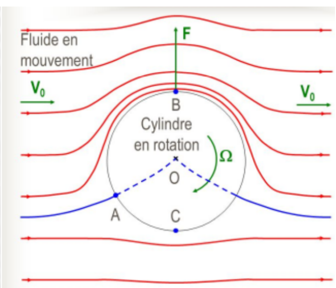


1. Montrer que le potentiel des vitesses ϕ vérifie $\Delta\phi = 0$
2. On cherche ϕ sous la forme $\phi = A\ r\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{r^2} + C$. Déterminer A et B. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de v_0, r, R et θ.
3. Dessiner l'allure des lignes équipotentielles

Exercice 7 - Écoulement autour d'un cylindre - ♥ / ★★

Un écoulement permanent, incompressible, uniforme est caractérisé par la vitesse $\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_x}$, loin d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a. On suppose que le théorème de superposition peut s'appliquer au champ de vitesse.





1. On suppose le cylindre fixe.
   (a) Déterminer les conditions aux limites pour ce champ de vitesse.
   (b) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant à la vitesse $v_0\overrightarrow{e_x}$ loin du cylindre, un champ perturbatif de la forme :

$$\overrightarrow{v_p} = \frac{A}{2\pi r^2}(\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\overrightarrow{u_\theta})$$

2. On suppose le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec la vitesse angulaire Ω.
   (a) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant, au précédent champ de vitesse, un champ de type "vortex" :

$$\overrightarrow{v}_{vortex} = \frac{B\Omega}{r}\overrightarrow{u_\theta}$$

   (b) Préciser les points d'arrets (points de vitesse nulle).

Éléments de réponse

Ex 1.
1. stationnaire, incompressible, tourbillonnaire
2. $\overrightarrow{a} = -\Omega^2\overrightarrow{u_x} - \Omega^2\overrightarrow{u_y}$

Ex 2. tourbillonnaire : a,b,c ; irrotationnel : d,e,f ; incompressible : a,d,e (essayer d'écrire l'expression du champ de vitesse)

Ex 3.
1. utiliser la continuité de la vitesse en a
2. Lignes de courant en cercles concentriques
3. incompressible
4. $r < a, \overrightarrow{rot}\overrightarrow{v} = 2\omega\overrightarrow{e_z}$, tourbillonnaire ; $r > a$ irrotationnel.

Ex 4.
1. $a = 1/R_0^2$
2. Intégrer sur la surface avec $dS = rdrd\theta$. $D_v = \frac{\pi\Delta PR_0^4}{8\eta L_0}$;$\Delta P = 7\ Pa$
3. $R_H = \frac{8\eta L_0}{\pi R_0^4}$
4. $R'_H = \frac{128\eta L_0}{\pi R_0^4}$
5. $D_{v,st}/D_{v,sain} = 0,167$
6. $R_2 = 0,95R_0$

Ex 5.
1. $x.y = cst$, hyperboles
2. incompressible et irrotationnel
3. $\phi = -kx^2/2 + ky^2/2 + cst$
4. $x(t) = X_0e^{-kt}$; $\overrightarrow{a} = k^2\overrightarrow{r}$

Ex 6.
1. Relation entre opérateurs
2. $A = v_0$; $B = v_0R^3/2$; $\overrightarrow{v} = v_0\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\overrightarrow{u_r} - v_0\sin\theta\left(1 - \frac{R^3}{2r^3}\right)\overrightarrow{u_\theta}$

Ex 7.
1. $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_r} = 0$ pour $r = a$ et $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_x}$ à l'infini.
2. points d'arrets $r = a$ ou $\theta = \pm\pi/2$ et $\sin\theta = \frac{a\omega}{2v_0}$