TD12

Cinématique des fluides

Correction

Applications du cours

Exercice 1 - Caractéristiques d'un écoulement

- $\vec{v}$ ne dépend pas du temps l'écoulement est stationnaire
- $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ l'écoulement est <u>incompressible</u>
- $\vec{\text{rot}}\, \vec{v} = 2\Omega \vec{u_z} \neq 0$ l'écoulement est <u>tourbillonnaire</u>

2)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} = \begin{vmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega^2 x \\ -\Omega^2 y \\ 0 \end{vmatrix}$$

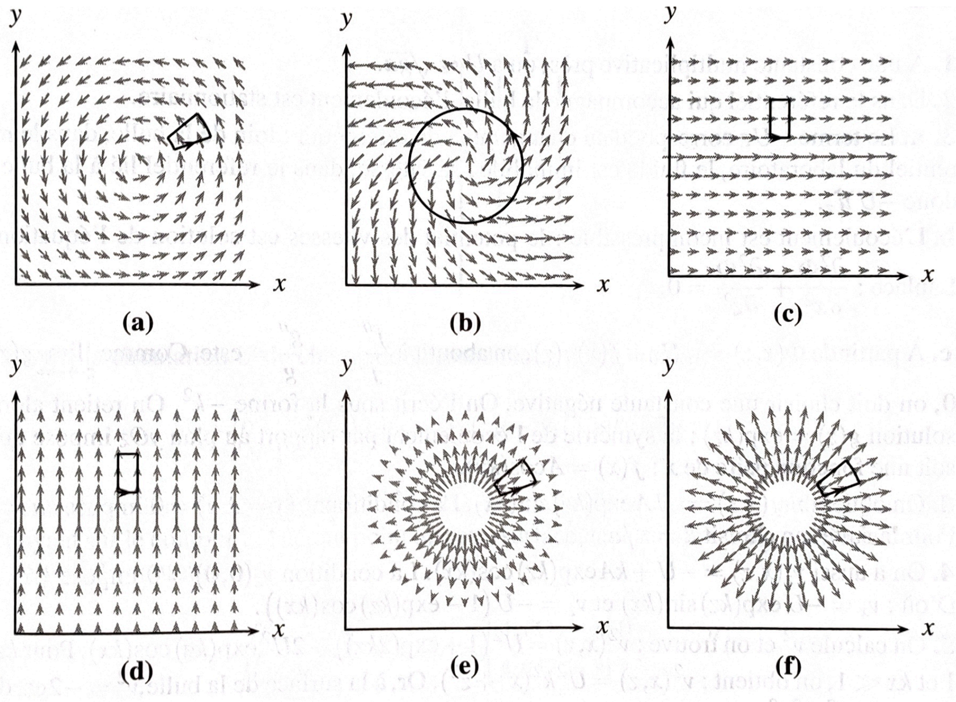
$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\Omega^2 (x\vec{e_x} + y\vec{e_y})}$$

Exercice 2 - Analyse de carte de champ

1. Pour déterminer si un écoulement est tourbillonnaire on peut calculer la circulation de $\vec{v}$ sur un contour fermé : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{dl}$. D'après le <u>théorème de Stokes</u>

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint_{S_{\mathcal{C}}} \vec{\text{rot}}\, \vec{v} \cdot \vec{dS}}$$

Ainsi une circulation non nulle implique $\vec{\text{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$ donc un écoulement tourbillonnaire



a. $\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} \neq 0 \rightarrow$ tourbillonnaire

$\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e_z}$

$\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = v_0\,\vec{e_\theta}$ donc $\text{div}\,\vec{v} = 0$

l'écoulement est incompressible

b. $\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} \neq 0 \rightarrow$ tourbillonnaire , $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e_z}$

$\vec{v}$ est compliqué à décrire, on ne peut rien dire sur la compressibilité

c. $\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} \neq 0$ → <u>tourbillonnaire</u>, $\begin{cases} \vec{\Omega}(y > y_0) = \Omega_0 \vec{e_z} \\ \vec{\Omega}(y < y_0) = -\Omega_0 \vec{e_z} \end{cases}$

y_0 est l'ordonnée du plan de symétrie des vitesses

$\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e_x}$ donc $\text{div}\,\vec{v} = 0$

l'écoulement est <u>incompressible</u>.

d. $\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = 0$ → <u>irrotationnel</u>

$\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e_y}$ donc $\text{div}\,\vec{v} \neq 0$

l'écoulement est <u>compressible</u>.

e. $\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = 0$ → <u>irrotationnel</u>

$\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e_r}$ donc $\text{div}\,\vec{v} \neq 0$

l'écoulement est <u>compressible</u>

d. $\oint \vec{v} \cdot \vec{dl} = 0$ → <u>irrotationnel</u>

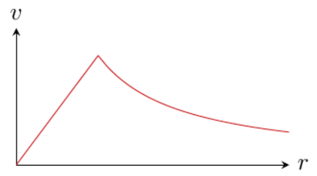
$\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = v_0 \vec{e_r}$ donc $\text{div}\,\vec{v} = 0$

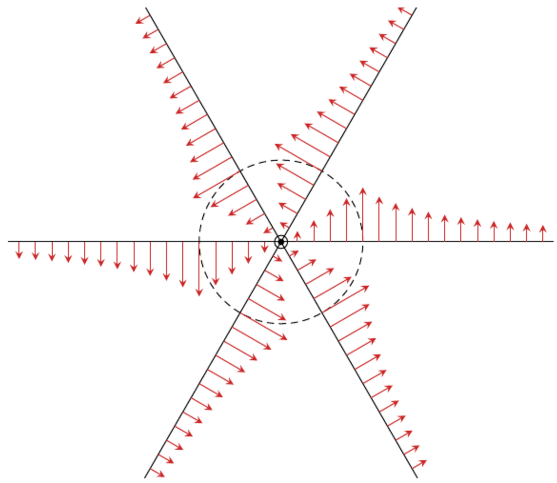
l'écoulement est <u>incompressible</u>

Exercice 3 - Tornade

1) En $r = a$: $\omega a = \frac{K}{a}$ donc $\boxed{K = \omega a^2}$

2) les lignes de courant sont des cercles





3) $v_r = 0$ donc $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ l'écoulement est incompressible

4) $r < a$ $\quad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\omega)}{\partial r}\vec{e_z} = 2\omega\vec{e_z}$

$r > a$ $\quad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(K)}{\partial r}\vec{e_z} = \vec{0}$

Ainsi l'écoulement est tourbillonnaire pour $r < a$

Approfondissements

Exercice 4 - Sténose artérielle

1) le sang est visqueux donc en $r = R_0$, $v = 0$

$v(R_0) = \frac{\Delta P}{4\eta L_0} R_0^2 (1 - a R_0^2)$ donc $a R_0^2 = 1$ et $\boxed{a = \frac{1}{R_0^2}}$

2) La vitesse débitante est la vitesse moyenne de fluide sur la section du tuyau $\boxed{U = \frac{D_v}{\pi R_0^2}}$

Calculons D_v :

$$D_v = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint \frac{\Delta P}{4\eta L_0} R_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \vec{e_z} \cdot r\, dr\, d\theta\, \vec{e_z}$$

$$= \frac{\Delta P}{4\eta L_0} R_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) r\, dr$$

$$= \frac{\Delta P}{4\eta L_0} R_0^2 \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R_0^2}\right]_0^{R_0}$$

$$= \frac{\Delta P}{4\eta L_0} R_0^2 \times 2\pi \times \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{4}\right)$$

$$D_v = \frac{\pi \Delta P R_0^4}{8\eta L_0}$$

Ainsi $\boxed{\Delta P = \frac{8\eta L_0}{\pi R_0^4} D_v = \frac{8\eta L_0 U}{R_0^2} = 7\ Pa}$

C'est le cœur qui crée cette différence de pression permettant l'écoulement du sang.

3) On retrouve l'analogie avec l'électricité ou le transfert thermique $\Delta V = R I$ ou $\Delta T = R_{th} \phi$

ici une différence de pression ΔP créé un flux de vitesse

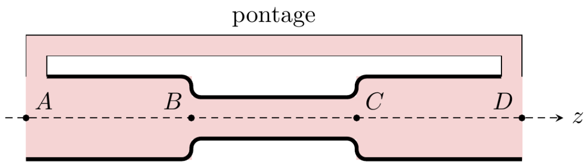
On a $\boxed{\Delta P = R_h D_v}$ ainsi $\boxed{R_h = \frac{8\eta L_0}{\pi R_0^4}}$

4) $R_H = \frac{8\eta L}{\pi R_0^4}$, $R_H' = \frac{8\eta L}{\pi \left(\frac{R_0}{2}\right)^4} = \frac{128\eta L}{\pi R_0^4}$

On ajoute les différences de pression $\Delta P = P_A - P_D$

$$= P_A - P_B + P_B - P_C + P_C - P_D$$

$$= \Delta P_{AB} + \Delta P_{BC} + \Delta P_{CD}$$



Ainsi $\Delta P = R_H D_v + R_H' D_v + R_H D_v$

$= (2R_H + R_H') D_v$

$R_{H,st} = 2R_H + R_H'$ les résistances s'ajoutent en série

$$\boxed{R_{H,st} = \frac{144\eta L}{\pi R_0^4}}$$

AN : $R_{H,st} = 2{,}7 . 10^6\ \mathrm{Pa.m^{-3}.s}$

5) $\boxed{\dfrac{D_{v,st}}{D_v} =} \dfrac{R_{H,sain}}{R_{H,st}} = \dfrac{3R_H}{2R_H + R_H'} = \dfrac{3}{2+16} \sim 0{,}167$

le débit est environ 6 fois plus faible à cause de la sténose

6) $D_{v\,tot} = D_{v\,sain} = \left(\dfrac{1}{R_{H,st}} + \dfrac{1}{R_{H,pont}}\right)\Delta P$

Donc $\dfrac{\Delta P}{3R_H} = \left(\dfrac{1}{R_{H,st}} + \dfrac{1}{R_{H,pont}}\right)\Delta P$

On en déduit $R_{H,pont} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3R_H} - \dfrac{1}{R_{H,st}}} = \dfrac{48 R_H}{13}$

$\dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4} \times \dfrac{48}{3} = \dfrac{8\eta(3L)}{\pi R_2^4}$ $\qquad (R_{H,st} = 16 R_H)$

Finalement $\boxed{R_2 = R_0 \sqrt[4]{\dfrac{39}{48}} = 0{,}95 R_0 = 6{,}65\ \mathrm{mm}}$

Exercice 5 - Modélisation d'un écoulement contre une paroi

1) les lignes de courant sont donnée par $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$

ou $\boxed{\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y}}$ soit $\dfrac{dx}{-kx} = \dfrac{dy}{ky}$

Après intégration : $-\ln \dfrac{x}{x_0} = \ln \dfrac{y}{y_0}$ d'où $\ln xy = \ln x_0 y_0$

l'équation des lignes de courant est $\boxed{xy = cst}$

ce sont des hyperboles.

les conditions aux limites sont respectées car $x = 0$ et $y = 0$, les bords de la paroi sont des lignes de courant (tangente à la paroi)

2) a. $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ donc l'écoulement est incompressible

b. $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$ donc " irrotationnel

3) $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \phi$ par définition

donc $\boxed{\phi = -\dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{ky^2}{2} + cst}$

4) a. En projection sur $\vec{u}_x$, l'expression de $\vec{v}$ donne :

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = -kx$ donc $\boxed{x(t) = x_0 e^{-kt}}$

De même sur $\vec{u}_y$, $v_y = \dfrac{dy}{dt} = ky$ d'où $\boxed{y(t) = y_0 e^{kt}}$

Ainsi $\vec{a} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y}$

$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e_y}$

$$\boxed{\vec{a} = -k^2 x \vec{e_x} + k^2 y \vec{e_y}}$$

b. $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v} = \left(-kx\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}$

$\boxed{\vec{a} = -k^2 x\vec{e_x} + k^2 y \vec{e_y}}$ on retrouve bien la même chose

Exercice 6 - Ecoulement perturbé par une sphère

1. l'écoulement est incompressible donc $\text{div}\,\vec{v} = 0$

de plus l'écoulement est irrotationnel donc $\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{\text{grad}}\,\phi$

Ainsi $\text{div}(\vec{\text{grad}}\,\phi) = 0$ d'où $\boxed{\Delta\phi = 0}$

2. $\vec{v} = \vec{\text{grad}}\,\phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\cos\theta - \frac{2B}{r^3}\cos\theta \\ -A\sin\theta - \frac{B\sin\theta}{r^3} \\ 0 \end{vmatrix}$

- Pour $r \to \infty$ on a $\vec{v} = V_0 \vec{u_z} = V_0\cos\theta\,\vec{u_r} - V_0 \sin\theta\,\vec{u_\theta}$

Ceci doit être vrai pour tout θ donc en particulier pour $\theta = 0$, par analogie on a donc $A = V_0$

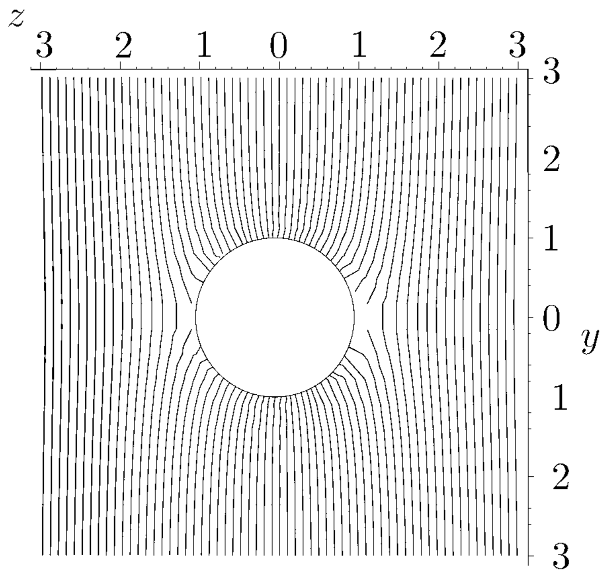
- Pour $r = R$ on a $V_r = 0$ donc $A\cos\theta - \frac{2B}{R^3}\cos\theta = 0$

On en déduit $B = \frac{V_0 R^3}{2}$

Ainsi $\vec{v} = V_0\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\vec{u_r} - V_0\sin\theta\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\vec{u_\theta}$

3. les équipotentielles sont les courbes telles que $\phi = \text{cst}$

$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{dl} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi\cdot\vec{dl} = d\phi}$ donc les équipotentielles sont les courbes perpendiculaires aux lignes de courant.



Exercice 7 - Ecoulement autour d'un cylindre

1) a. Si le cylindre est fixe $\vec{v}\cdot\vec{u_r} = 0$ en $r = a$ $\forall\theta$

De plus pour $r \to \infty$, $\vec{v} = v_0\,\vec{u_x} = \vec{v_\infty}$

b. $\vec{v_\infty} = v_0\cos\theta\,\vec{u_r} - v_0\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$$\vec{v} = \vec{v_f} + \vec{v_\infty} = v_0\cos\theta\left(1+\frac{A}{2\pi r^2}\right)\vec{u_r} - v_0\sin\theta\left(1-\frac{A}{2\pi r^2}\right)\vec{u_\theta}$$

Pour $r = a$, $\vec{v}\cdot\vec{u_r} = 0$ donc $\boxed{A = -2\pi a^2}$

Ainsi $\vec{v} = v_0\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{u_r} - v_0\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\vec{u_\theta}$

2) a. $\vec{v} = \vec{V_p} + \vec{V_\infty} + \vec{V_v} = V_0 \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{u_r} - \left(V_0 \sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{B\Omega}{r}\right)\vec{u_\theta}$

en $r = a$, la vitesse doit etre celle du cylindre donc

$V(r=a) = a\Omega\,\vec{u_\theta}$ ainsi $\frac{B\Omega}{a} = a\Omega$

D'où $\boxed{B = a^2}$.

b. les points d'arrets sont donnés par $\vec{v} = \vec{0}$ soit :

$$\begin{cases} r = a \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{a}{2V_0} \\ \text{ou} \\ \theta = +\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad V_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{a^2\Omega}{r} = 0 \end{cases}$$

- si $\frac{a\Omega}{2V_0} < 1$ il y a 2 point d'arrets sur le cylindre
- Si $\frac{a\Omega}{2V_0} = 1$ il y a un seul point d'arret en $\theta =$ sur le cylindre
- Si $a\Omega > 2V_0$, il y a un unique point d'arret hors du cylindre en $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui verifie $V_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{a^2\Omega}{r} = 0$