TD 13

Dynamique des fluides

Questions de cours

- Donner l'expression volumique des forces de pesanteur, de pression et d'inertie.
- Expliquer qualitativement la notion de viscosité.
- Donner l'expression de la force de frottement visqueux ressentie par une tranche de fluide.
- Donner l'expression volumique de la force de viscosité ressentie par une particule de fluide.
- Donner l'expression du Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.
- Donner l'équation d'Euler. Dans quelle(s) condition(s) avons-nous cette équation ?
- Déduire de l'équation d'Euler la relation de la statique des fluides.
- Expliquer qualitativement l'effet Coanda.
- Démontrer le théorème de Bernoulli. Quelles sont ses conditions d'application ?
- Donner l'équation de Navier-Stokes.
- Définir le nombre de Reynolds. Quel est son intérêt physique ?
- Déterminer une expression du nombre de Reynolds en fonction des grandeurs caractéristiques du problème.
- Définir la viscosité cinématique.
- Qu'est ce que deux écoulements similaires ?
- Définir la notion de couche limite. Déterminer son épaisseur en fonction du nombre de Reynolds.
- Donner les principales conditions aux limites pour un écoulement.
- Dessiner la forme d'un écoulement autour d'un obstacle en fonction du nombre de Reynolds. Nommer les différents écoulements.

Applications directes du cours

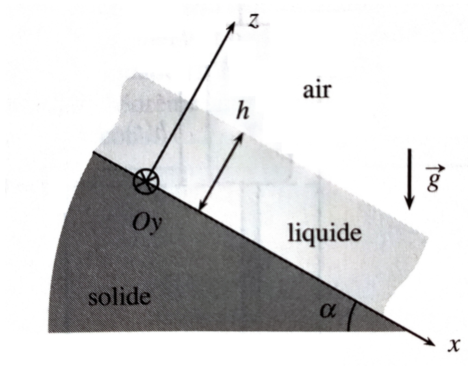
Exercice 1 - Nombre de Rossby dans l'atmosphère - ♥/ ★

On considère un écoulement de vitesse caractéristique d'écoulement U et de dimension horizontale caractéristique L. On appelle nombre de Rossby (Ro) d'un écoulement le rapport sans dimension entre le terme d'accélération et le terme lié à la force de Coriolis dans un écoulement.

1. Ecrire l'équation d'Euler dans le référentiel terrestre non galiléen.
2. Evaluer Ro pour un écoulement atmosphérique typique pour lequel $U = 10\ m.s^{-1}$ et $L = 1000\ km$. Commenter le résultat obtenu.
3. Même chose pour un écoulement d'air dans une pièce : $U = 1\ m.s^{-1}$ et $L = 10\ m$.

Exercice 2 - Ecoulement sur un plan incliné - ♥♥♥ / ★★

Considérons une couche d'épaisseur h, d'un liquide visqueux, de viscosité dynamique η et de masse volumique μ, en écoulement sur un plan incliné faisant avec l'horizontale un angle α. En régime stationnaire, celui-ci est unidirectionnel et la seule composante non nulle du champ eulérien des vitesses ne dépend que de z, soit $v_x(z)$. La surface libre correspond à $z = h$ et le plan supportant la couche à $z = 0$.



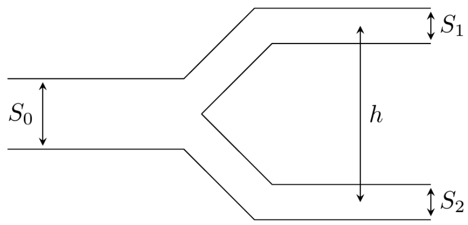
1. Dans ces conditions, montrer que l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{grad}\ P + \mu\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

2. Déterminer l'expression de $P(x, z)$ puis montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$.
3. Après avoir explicité les conditions aux limites pour la vitesse, déterminer le profil d'un tel écoulement.
4. La couche limite est de largeur L dans la direction Oy. Cette largeur est très grande devant la hauteur h de la coulée, l'expression de la vitesse est alors indépendante de y. Calculer le débit volumique Q et en déduire la vitesse moyenne d'écoulement.
5. Utiliser l'expression obtenue pour la vitesse moyenne dans le cas d'une coulée de lave d'épaisseur $h = 1\ m$ sur un plan faisant l'angle de 1° avec l'horizontale. On donne $\eta = 2.10^4\ Pl$ et $\mu = 2700\ kg.m^{-3}$. Déterminer le nombre de Reynolds pour analyser la pertinence du modèle.

Exercice 3 - Fourche hydraulique - ♥♥ / ★

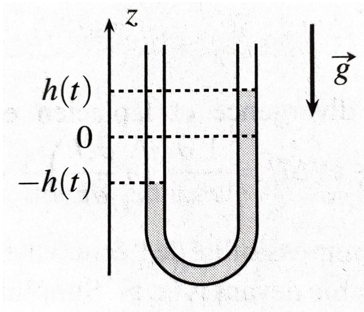
On considère une conduite d'eau avec un Y de séparation telle que $S_1 = S_2 = S_0/2$. Le système n'est pas horizontal : on note h la dénivellation entre les deux sorties, supposées toutes les deux à l'air libre.



Exprimer les vitesses v_1 et v_2 en fonction de h et de la vitesse d'entrée v_0.

Exercice 4 - Oscillation d'un tube en U - ♥♥♥ / ★★

Un tube en U de section constante S est rempli par un liquide de masse volumique μ. On a versé un volume $V = SL$ de liquide.



On considérera que la section du tube est faible en regard des autres dimensions ; on pourra ainsi considérer que l'écoulement est bidimensionnel.

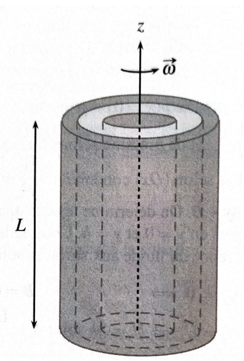
En supposant le liquide parfait, déterminer la période des oscillations :

1. en utilisant l'équation d'Euler
2. en utilisant la conservation de l'énergie.

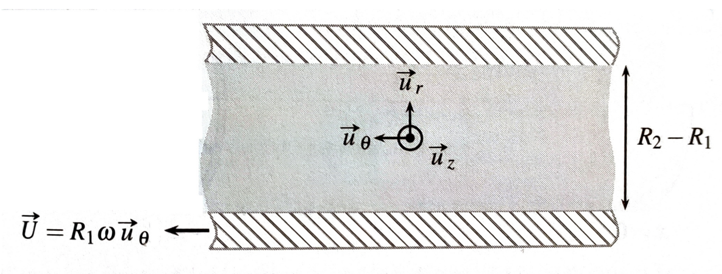
Approfondissement

Exercice 5 - Viscosimètre de Couette - ♥♥ / ★★

Le viscosimètre est un dispositif destiné à mesurer la viscosité dynamique d'un fluide. Il est schématisé ci-dessous



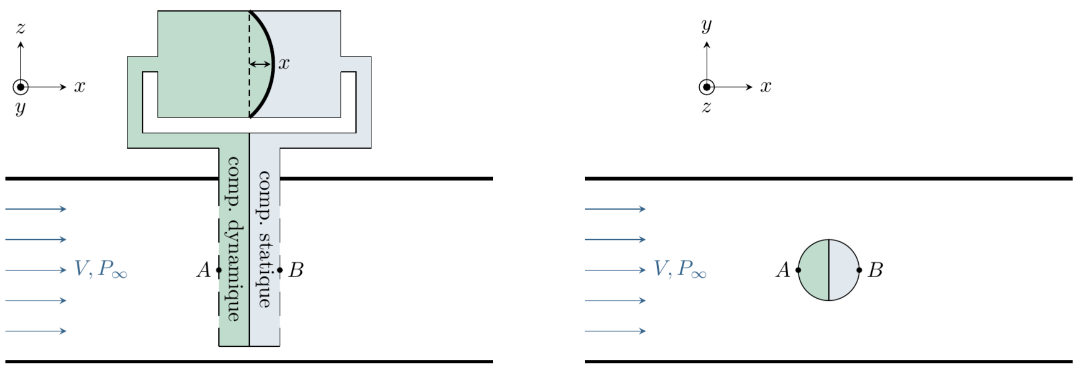
Le fluide visqueux est inséré entre deux cylindres coaxiaux, de hauteur L. Le fluide occupe le volume compris enter les deux rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre intérieur, de rayon R_1, est entraîné à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$. On suppose que $R_2 - R_1 \ll R_2$ de sorte que localement l'écoulement peut être considéré comme plan. L'écoulement est supposé stationnaire.



1. Justifier que la vitesse de l'écoulement s'écrit $\overrightarrow{v}(M,t) = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées cylindriques.
2. Par analogie avec l'écoulement de Couette plan on peut écrire $v(r) = Ar + B$. A l'aide des conditions aux limites déterminer A et B.
3. Déterminer l'expression de la force de viscosité élémentaire $\overrightarrow{dF}$ que le fluide visqueux exerce sur une portion dS de la surface du cylindre intérieur
4. En déduire le moment résistant engendré par la force de viscosité sur le cylindre de rayon R_1.
5. Comment utiliser ce résultat pour mesurer la viscosité dynamique du fluide ?

Exercice 6 - Tube de Pitot moyenné - ♥ / ★

Les sondes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de pression différentielle. La vidéo (QR code ci-contre) en présente une utilisation pour la mesure d'écoulements industriels en conduite. On modélise une telle sonde par le dispositif présenté ci-dessous.



L'écoulement dans la conduite est supposé parfait, incompressible et stationnaire. On néglige les variations d'altitude dans la conduite et dans la sonde, si bien que la pression et la vitesse sont uniformes dans toute section de la conduite. On note V la vitesse débitante et P_∞ la pression dans l'écoulement loin de la sonde.

La membrane est de surface S supposée constante. Le décalage du centre de la membrane est noté x et on admet que l'élasticité de la membrane tend à la ramener vers sa position de repos avec une force de rappel élastique linéaire $\overrightarrow{f} = -kx\overrightarrow{e_x}$.

1. Citer quelques avantages des sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo.
2. Représenter en vue du dessus (schéma de droite) l'allure des lignes de courant de l'écoulement au voisinage de la sonde de Pitot.
3. A partir du tracé précédent, justifier qualitativement que le point A est un point d'arrêt. Exprimer la pression P_A en ce point.
4. Justifier qualitativement qu'au point B, $v_B = 0$ et $P_B \simeq P_\infty$.
5. Ecrire la condition d'équilibre de la membrane.
6. En déduire l'expression de la vitesse de l'écoulement en fonction du déplacement de la membrane.

Exercice 7 - Viscosité et diffusion - ♥♥ / ★★

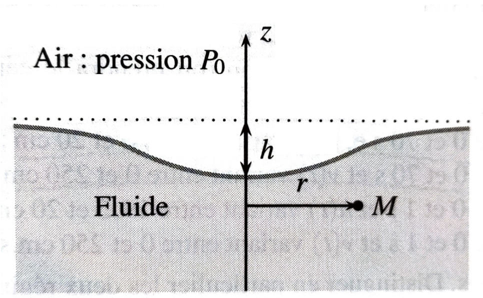
On considère une particule de fluide comprise entre x et $x + dx$, y et $y + dy$ et z et $z + dz$. La particule de fluide est en mouvement rectiligne dans la direction (Ox) dans le référentiel terrestre galiléen. Le fluide est visqueux, de viscosité dynamique η et sa vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{v}(M,t) = v_x(y,t)\overrightarrow{e_x}$$

1. Appliquer le PFD projeté sur la direction du mouvement à la particule de fluide.
2. En déduire que $v_x(y,t)$ vérifie une équation de diffusion. Donner le coefficient de diffusion.
3. Calculer le vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega}$ associé à cet écoulement. Montrer que sa composante Ω_z vérifie elle aussi une équation de diffusion.

Exercice 8 - Tourbillon de Rankine - ♥ / ★★★★

On considère un fluide en écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible pour lequel le champ des vitesses est orthoradial et caractérisé par la donnée du vecteur tourbillon : $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{v} = \omega_0\overrightarrow{u_z}$, pour $r \leq a$ et $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$ pour $r > a$, en coordonnées cylindriques.



1. En utilisant théorème de Green-Stokes déterminer l'expression du champ de vitesse dans tout le fluide à partir du calcul de sa circulation.
2. A l'aide de l'équation d'Euler, déterminer le champ de pression au sein du fluide. Que peut-il se produire sur l'axe si la rotation est trop importante ? En déduire l'équation de la surface libre ainsi que la profondeur du h du tourbillon.
3. En prenant ce modèle pour une trombe de rayon $a = 30\ m$, évaluer la force maximale d'arrachement sur un toit circulaire de rayon égal à $10\ m$. On supposera un vente de vitesse maximale égale à $100\ km.h^{-1}$.

Éléments de réponse

Ex 1. 2. Ro = 0,14 ; 3. Ro = 1375

Ex 2.
2. projeter NS sur x et z
   $P(x, z) = P_0 + \mu g(h - z)\cos\alpha$
3. $v_x(z = 0) = 0$ et $\frac{\partial v_x(z)}{\partial z}_{|z=h} = 0$
   $v_x(z) = \frac{\mu g}{\eta} z(h - \frac{z}{2})\sin\alpha$
4. $Q = \frac{\mu g L h^3}{3\eta}\sin\alpha$
5. $v_{moy} = 7,7.10^{-3} m.s^{-1}$

Ex 3. $v_1 = (1 - \frac{gh}{2v_0^2})v_0$ et $v_2 = (1 + \frac{gh}{2v_0^2})v_0$

Ex 4. Intégrer Euler sur une ligne de courant allant d'une surface libre à l'autre
$\ddot{h} + \frac{2g}{L}h = 0$

Ex 5.
1. Invariances et symétries
2. $\overrightarrow{v} = R_1\omega\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\overrightarrow{u_\theta}$
3. $\overrightarrow{dF} = -\eta\omega\frac{R_1}{R_2 - R_1}R_1 d\theta dz\overrightarrow{u_\theta}$
4. $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \int\overrightarrow{d\mathcal{M}} = -\frac{2\pi\eta L R_1^3}{R_2 - R_1}\overrightarrow{\omega}$

Ex 6.
3. $P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\mu v^2$
6. $v = \sqrt{\frac{2kx}{\mu S}}$

Ex 7.
1. Forces de viscosité et forces de pression
2. $\frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$
3. $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\overrightarrow{u_z}$

Ex 8.
1. $r \leq a : v = \omega_0 r$ et $r > a; v = \frac{\omega_0 a^2}{r}$
2. $r \leq a : P(r, z) = P_0 - \mu g(h + z) + \mu\frac{1}{2}\omega_0^2 r^2$ et $r > a : P(r, z) = P_0 - \mu g z - \mu\frac{1}{2}\omega_0^2\frac{a^4}{r^2}$
   $r \leq a : z(r) = \frac{\omega_0^2 a^2}{g}(\frac{r^2}{2a^2} - 1)$ et $r > a : z(r) = -\frac{\omega_0^2 a^2}{g}\frac{a^2}{2r^2}$