
DM 5
Ondes mécanique et mécanique des fluides

Correction

1 Etude d'un canalisation domestique d'amenée d'eau

34) L'écoulement est selon l'axe Oz et le problème est à symétrie cylindrique d'axe Oz. On prend donc la forme proposée.

35) L'équation de conservation de la masse est $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$. Comme la masse volumique est constante, la divergence de la vitesse est donc nulle. Le formulaire fourni donne $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ donc $v = v(r)$.

36a) On peut remarquer qu'une particule de fluide avance à vitesse constante donc que l'accélération particulaire est nulle. On prend alors la composante radiale de NS qui donne $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$. La pression ne dépend pas de r.

36b) On prend maintenant la composante selon z de NS qui donne $\frac{\eta}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] = \frac{\partial P}{\partial z}$. Le premier membre ne dépend pas de z d'après sa formulation, et dépend uniquement de r d'après le second membre. Les deux termes sont donc constants et on appelle K la constante.

37) On intègre une première fois la relation précédente qui donne : $\frac{dv}{dr} = \frac{Kr}{2\eta} + \frac{K_1}{r}$. On intègre alors à nouveau $v = \frac{Kr^2}{4\eta} + K_1 \cdot \ln(r) + K_2$

La seule façon d'éviter une divergence en $r=0$ est de prendre $K_1=0$. K_2 est obtenu par la CL $v(D/2)=0$. On obtient finalement : $v = \frac{K}{4\eta} \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right)$.

Comme le terme entre parenthèse est toujours négatif ou nul, $v>0$ entraîne $K<0$. Le mouvement de matière se fait dans le sens des pressions décroissantes.

$$38) \text{ On calcule : } Q_v = \int_0^{D/2} 2\pi r v(r) dr = -\frac{K\pi D^4}{128\eta}$$

$$39) \text{ La vitesse est maximale en } r=0 \text{ et } v_o = -\frac{KD^2}{16\eta} = \frac{8Q_v}{\pi D^2}$$

40) R_e compare le transfert de quantité de mouvement par transport de matière au transfert de quantité de mouvement par viscosité, et est le rapport en norme de l'accélération convective sur la force massique de viscosité. On obtient $R_e = \frac{\rho U D}{\eta} = \frac{4\rho Q_v}{\pi \eta D}$.

41) Pour un écoulement laminaire, il faut $R_e < 2300$, ce qui donne $Q_{v\max} = 0,15 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ ou environ 550L/h et $v_{o\max} = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour le débit usuel, on peut considérer l'écoulement laminaire, ce qui ne sera pas le cas pour le débit maximum.

Partie G.

42) Le fluide étant incompressible, le resserrement des lignes de champs est lié à une augmentation de vitesse. $v(J) > v(C) > v(A) > v(K)$

$$43) \text{ On calcule } Q_v = v(A) h L_1 = 0,125 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Comme les lignes de courant paraissent parallèles au niveau de C et D, la vitesse doit être uniforme sur une section droite. La conservation du débit volumique entraîne $v(C) = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

44) Dans le cadre d'un écoulement permanent irrotationnel d'un fluide parfait incompressible dans le champ de pesanteur terrestre, on obtient dans tout le fluide $P + \rho v^2 / 2 + \rho g z = \text{Cte}$ où l'axe Oz est la verticale ascendante.

45) Le point M est un point d'arrêt, donc de vitesse nulle. Si on suppose valide la relation précédente, si on néglige l'influence de la variation d'altitude, si on suppose que la vitesse au point N est proche de U, l'application de la relation en M et N donne : $U = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$.

46) En appliquant la loi de l'hydrostatique au fluide dense, on obtient $\delta P = \rho_a g h$

$$47) \text{ On remplace et on obtient : } U = \sqrt{\frac{2\rho_a g h}{\rho}}$$

48) On calcule $R_e \approx 10^5 \gg 2300$, donc on peut considérer valide le modèle du fluide parfait pour calculer la vitesse au point A.

Partie H.

Pour l'application de la RFD dans R', l'accélération d'entraînement s'écrit $\vec{a}_e(M) = -\Omega^2 \overrightarrow{OM}$ et l'accélération de Coriolis est $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$.

49) On est ici en statique, l'accélération de Coriolis est nulle et l'application de la RFD donne :

$$\vec{R}_1 = -m\vec{g} - m\Omega^2 \overrightarrow{OM}$$

50) Maintenant, il faut de tenir compte Coriolis, l'accélération dans R' est nulle et on obtient :

$$\vec{R}_2 = -m\vec{g} - m\Omega^2 \overrightarrow{OM} + 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

51) La masse du système $dm = \mu dx$. Au premier ordre en α , $\cos(\alpha) = 1$ et $\sin(\alpha) = \alpha$

En négligeant le poids, la RFD s'écrit : $\mu dx \vec{a} = \vec{T}_g + \vec{T}_d$

On projette sur l'axe Ox en supposant le mouvement vertical. Au premier ordre en α , on obtient :

$$0 = -T(x,t) + T(x+dx,t) \quad \text{donc } T \text{ ne dépend pas de } x$$

C'est beaucoup moins clair pour la dépendance temporelle. En supposant la perturbation faible, on pourrait obtenir $T \approx T_0$.

La projection sur l'axe Oy donne maintenant :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 (\alpha(x+dx) - \alpha(x)) \quad \text{soit encore } \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

52) On a $\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha$. On obtient alors l'équation d'onde avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

53) AN : $c = 36,5 \text{ m.s}^{-1}$.

54a) Onde longitudinale : la perturbation est dans la même direction que la direction de propagation, ondes sonores par exemple.

Onde transversale : la perturbation est dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation : ondes sur une cordes, ondes électromagnétiques.

54b) Une onde progressive se meut sans se déformer dans une direction et un sens déterminés. Une onde stationnaire peut être considérée comme la somme de deux ondes identiques se propageant dans la même direction, mais de sens opposés, il y a alors découplage des variables d'espace et de temps ; la puissance moyenne transportée par une onde stationnaire est nulle.

55a) On a doit avoir $y_n(0,t) = y_n(L,t) = 0$. La première relation est vérifiée, la seconde impose $\sin(k_n L) = 0$ soit $k_n L = n\pi$. $k_n = 2\pi/\lambda_n$ donne $\lambda_n = 2L/n$.

55b) $k_n = \omega_n/c$ donne $\omega_n = n\pi c/L$.

56) Les amplitudes a_n et b_n dépendent des conditions initiales.

$$57) f_1 = \frac{c}{2L} = 91,25 \text{ Hz}$$

58) Le plus simple est d'utiliser un PDT qui donne $\underline{H} = \frac{R_0}{R_0 + j(L_0 \omega - 1/C_0 \omega)}$.

$$59) G_0 = 1 ; Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad \text{et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande du second ordre.

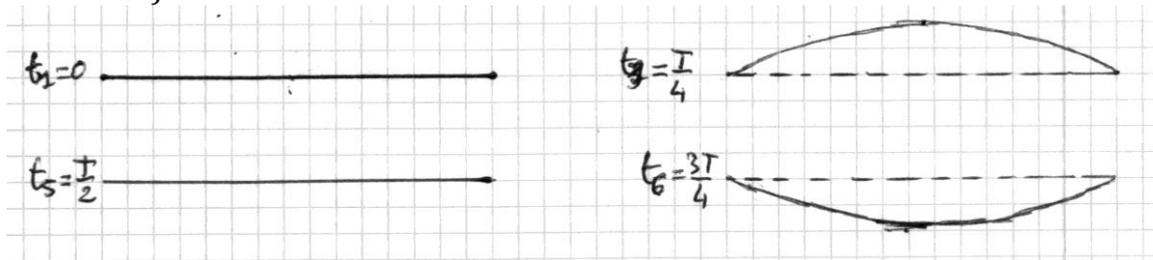
60a) On calcule $C_0 \approx 22,3 \mu\text{F}$.

60b) On rappelle $\Delta f = f_0/Q$ avec $f_0 = f_1$. Une analyse simplifiée donne $f_3 - f_1 = 2f_1 > \Delta f/2$

Ce qui donne $R_{0max} = 4 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

61a) On a donc $y_1(x,t) = y_{1\max} \cdot \sin(k_1 x) \sin(\omega_1 t)$.

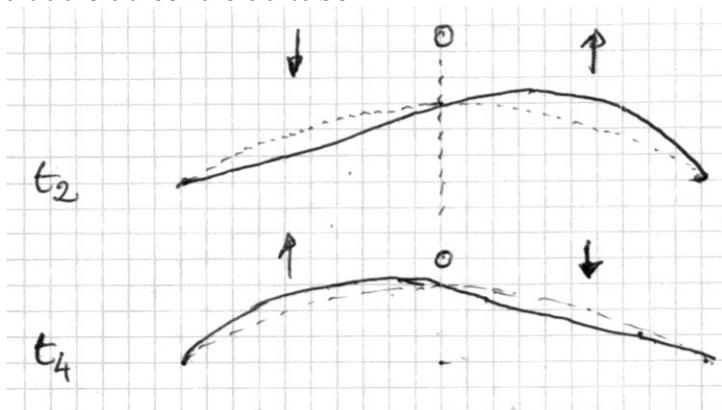
61b)



62) Ce terme est l'équivalent du vecteur rotation instantané.

En supposant alors que la solution est faiblement altérée par la présence de la nouvelle force, on calcule : $d\vec{F}_{ic} = -2\mu dx \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(k_1 x) v' \vec{n}$.

63) En supposant que la perturbation ait des effets instantanés, il ne se passe rien en t_3 et t_6 car le cos temporel est nul. Par contre, la perturbation a des effets dissymétriques de part et d'autre du centre du tube.



64) Il s'agit d'un étalonnage, utilisée par exemple avec une sonde de Hall pour mesurer un champ magnétique.

Proposition de corrigé

Ce corrigé a été rédigé par David LASNE. N'hésitez pas à me signaler par mail (david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves. Merci à Nathalie GUILBERT pour la relecture et à Matthieu RIGAUT pour les discussions en amont.

Par ailleurs quelques imperfections ou ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure.

I / Le câble coaxial

I.1 Le câble coaxial parfait

Q1. Lorsque le câble est fermé à son extrémité par un dipôle, le courant "revient" par la gaine. Cependant, on ne se place pas dans l'ARQS ici, donc le courant n'a pas réellement besoin de "revenir"... La question peut donc troubler certains élèves...

Q2. La loi des mailles donne, en notant u_L la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\boxed{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}}$$

Ensuite, la loi des nœuds donne, en notant i_C le courant qui "descend" dans le condensateur :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_C$$

Or $i_C = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ au premier ordre, et $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\boxed{\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}}$$

Q3. On dérive la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à l'espace, et on assimile les dérivées croisées : $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ (théorème de SCHWARTZ). Il vient alors :

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = 0}$$

De même, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t , et en assimilant les dérivées croisées de $i(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0}$$

On reconnaît dans les 2 cas une équation de D'ALEMBERT avec une célérité des ondes

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}}$$

v est bien une vitesse pour que l'équation reste homogène : $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ est en $V.s^{-2}$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ est en $V.m^{-2}$ donc v est bien en $m.s^{-1}$.

Autre manière de le vérifier : $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la pulsation caractéristique d'un circuit RLC, donc en s^{-1} , or Γ et Λ sont des grandeurs linéiques donc $\sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$ est bien en $m.s^{-1}$.

Q4. On injecte la solution proposée dans l'équation de D'ALEMBERT. Comme $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{u}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 \underline{u}(x, t)$, celle-ci devient :

$$-k^2 \underline{u}(x, t) + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{u}(x, t) = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

On obtient la relation de dispersion usuelle associée à l'équation de D'ALEMBERT : en effet, on a cherché une solution en somme d'OPPM se propageant dans le sens des x croissants (terme en i_0) et décroissants (terme en i_1).

Q5. On injecte la solution proposée dans l'une des équations de couplage, par exemple $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$:

$$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} = -\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

On en déduit :

$$k\rho = \Lambda\omega \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$$

Si u est une tension et i une intensité, ρ et donc Z_c sont des impédances, homogènes à des résistances, donc en Ω .

Q6. On applique la loi d'OHM à l'extrémité du câble : $\underline{u}(d, t) = \underline{Z}i(d, t)$:

$$\rho i_0 e^{j(\omega t - kd)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kd)} = \underline{Z}i_0 e^{j(\omega t - kd)} + \underline{Z}i_1 e^{j(\omega t + kd)}$$

$$i_0(\rho - \underline{Z})e^{-jkd} = i_1(\rho + \underline{Z})e^{+jkd} \Rightarrow i_1 = i_0 \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$$

Q7. On note $\chi = \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$ le coefficient de réflexion pour exprimer $\underline{Z}_l(x)$:

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{u(x, t)}{i(x, t)} = \frac{\rho(i_0 e^{-jkx} - i_1 e^{+jkx})}{i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+jkx}}$$

$$\underline{Z}_l(x) = \rho \frac{e^{-jkx} - \chi e^{+jkx}}{e^{-jkx} + \chi e^{+jkx}} = \rho \frac{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkx} - (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkx} + (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}$$

$\underline{Z}_l(x)$ est donc indépendant de x si $\rho = \underline{Z} = Z_c$. Dans ce cas, $\underline{Z}_l(x) = \rho$ et $\chi = 0$, c'est-à-dire $i_1 = 0$: il n'y a **pas d'onde réfléchi** : toute l'onde est transmise, ce qui optimise le transfert du signal. il faut donc mettre en bout de câble une impédance égale à Z_c ("adaptation d'impédance").

I.2 Le câble coaxial avec pertes

Q8. Les parties métalliques (gaine et âme) sont en métal non parfait, ayant une conductivité limitée, donc une certaine résistance : il y a donc des pertes par effet JOULE.

Q9. La loi des mailles donne cette fois :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L + u_R$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$, $u_R = r dx i(x, t)$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r i(x, t)$$

Par ailleurs, on a toujours $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ par la loi des nœuds. En dérivant la première équation par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En remplaçant avec la seconde équation, on obtient la relation demandée :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Q10. On injecte la solution proposée :

$$(-jk)^2 = \Gamma\Lambda(j\omega)^2 + r\Gamma j\omega$$

D'où la relation de dispersion : $k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - r\Gamma j\omega$.

Q11. Si $k = \alpha - j\beta$, on peut écrire $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$. Ainsi α correspond à l'aspect propagatif de l'onde, et β à l'absorption de l'onde (sur une distance caractéristique $1/\beta$). Si $\alpha > 0$, l'onde se propage vers les x croissants, donc $\beta > 0$ pour avoir une atténuation, cohérente avec la dissipation d'énergie par effet JOULE.

Q12. On a $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ et $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$, donc la puissance moyenne s'écrit :

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t)) = \frac{1}{2} u_0 i_0 e^{-2\beta x} = P_0 e^{-2\beta x}$$

On en déduit $A = \frac{10}{\ln 10} \frac{2\beta x}{x} = 2\beta \frac{10}{\ln 10}$.

Q13. On a $\underline{k}^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{\Gamma\Lambda\omega^2}\right)$. On passe à la puissance 1/2, puis on utilise le DL de $(1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$ (en admettant qu'il fonctionne pour les complexes et que la racine est définie également...) :

$$\underline{k} \approx \sqrt{\Gamma\Lambda\omega} \left(1 - \frac{r\Gamma j\omega}{2\Gamma\Lambda\omega^2}\right)$$

On identifie la partie imaginaire de \underline{k} à β donc on trouve $\beta = \sqrt{\Gamma\Lambda\omega} \cdot \frac{r\Gamma\omega}{2\Gamma\Lambda\omega^2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$. On reporte dans l'expression de A pour obtenir l'expression demandée :

$$A = 2\beta \frac{10}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Q14. Le phénomène responsable est l'**effet de peau** : le champ EM ne pénètre dans un conducteur ohmique que sur une profondeur caractéristique $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, donc le courant ne circule que sur cette épaisseur caractéristique. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la section de conduction diminue donc la résistance augmente avec $r \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.