TD13

Dynamique des fluides

Correction

Applications du cours

Exercice 1 - Nombre de Rossby

1) L'équation d'Euler s'écrit :

$$\boxed{\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\, P + \mu \vec{g} - 2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v}}$$

Avec $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$

⚠ la force d'inertie d'entrainement est ici incluse dans le poids

2) $\boxed{R_o = \frac{\mu \|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\|}{\|2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|} \sim \frac{\mu \frac{U^2}{L}}{2\mu \Omega U} = \frac{U}{2L\Omega} \sim \frac{U}{L\Omega}}$

AN : $R_o = 0{,}14$, la force de Coriolis est importante ici.

3) $R_o \sim 1375$, on peut négliger la force de Coriolis

Exercice 2 - Ecoulement sur un plan incliné

1). l'écoulement est stationnaire donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

· $(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = v_x(z) \frac{\partial v_x(z)}{\partial x} \vec{u_x} = \vec{0}$

Ainsi $\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}}$, on trouve bien l'égalité demandée

2) l'équation de NS projetée donne :

$/O_x \rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu g \sin\alpha + \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2}$ (1)

$/O_z \rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g \cos\alpha$ (2)

De la deuxième équation on peut tirer

$P(x,z) = -\mu g z \cos\alpha + f(x)$

Or $\forall x$, $P(x, z=h) = P_0$ d'où $f(x) = P_0 + \mu g h \cos\alpha$

Finalement $\boxed{P(x,z) = P_0 + \mu g (h-z)\cos\alpha}$

On en déduit que $\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = 0}$

3) Conditions limites :

- en $z=0$, contact avec un solide immobile : $\underline{v_x(x, z=0) = 0}$

- en $z = h$, contact avec l'air, fluide parfait

$$\rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial v_x(z)}{\partial z}\right|_{z=h} = 0}$$

On a d'après (1) : $\dfrac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = -\dfrac{\mu g}{\eta} \sin\alpha$

d'où $\dfrac{\partial v_x(z)}{\partial z} = -\dfrac{\mu g}{\eta} z \sin\alpha + A$

et d'après la condition limite en $z = h$:

$\dfrac{\mu g}{\eta} h \sin\alpha = A$ d'où $\dfrac{\partial v_x(z)}{\partial z} = \dfrac{\mu g}{\eta}(h - z)\sin\alpha$

Enfin en primitivant $v_x(z) = -\dfrac{\mu g}{2\eta}(h-z)^2 \sin\alpha + B$

Avec la deuxième condition limite en $z = 0$:

$+\dfrac{\mu g}{2\eta} h^2 \sin\alpha = B$

D'où $v_x(z) = -\dfrac{\mu g}{2\eta}\left((h-z)^2 - h^2\right)\sin\alpha$

$$\boxed{v_x(z) = \frac{\mu g}{\eta} z \left(h - \frac{z}{2}\right) \sin\alpha}$$

4) Par définition $Q = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS}$

$$= \int_{z=0}^{h} \int_{y=0}^{L} (\vec{v} \cdot dy\, dz$$

$$= L \int_0^h v\, dz$$

$$Q = L \int_0^h \frac{\mu g}{\eta} z\left(h - \frac{z}{2}\right) \sin\alpha\, dz$$

$$Q = \left(\frac{\mu g L}{\eta} h \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h - \frac{\mu g L}{2\eta}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h\right) \sin\alpha$$

$$\boxed{Q = \frac{\mu g L h^3}{3\eta} \sin\alpha}$$

La vitesse moyenne se détermine par $\boxed{v_{moy} = \frac{Q}{Lh} = \frac{\mu g h^2}{3\eta} \sin\alpha}$

5) AW : $v_{moy} = 7{,}7 \cdot 10^{-3}\, m \cdot s^{-1}$

c'est très lent mais pas étonnant pour de la lave

$Re = \frac{\mu v_{moy}}{\eta} = 1 \cdot 10^{-3}$ il s'agit bien d'un écoulement laminaire, l'expression de $\vec{v}$ est justifiée

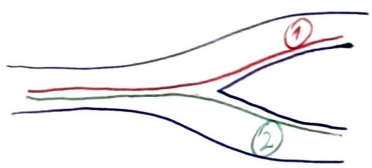
Exercice 3 - Fourche hydraulique

L'eau est incompressible en bonne approximation donc on peut supposer que le débit volumique se conserve :

$$D_{V_0} = D_{V_1} + D_{V_2} \rightarrow S_0 V_0 = S_1 V_1 + S_2 V_2$$

D'où $\boxed{2V_0 = V_1 + V_2}$ (1)

Appliquons le théorème de Bernoulli sur 2 lignes de courant passant l'une par S_1 et l'autre part S_2



① : $\dfrac{P_0}{\mu} + \dfrac{V_0^2}{2} + 0 = \dfrac{P_{atm}}{\mu} + \dfrac{V_1^2}{2} + \dfrac{gh}{2}$

② : $\dfrac{P_0}{\mu} + \dfrac{V_0^2}{2} + 0 = \dfrac{P_{atm}}{\mu} + \dfrac{V_2^2}{2} - \dfrac{gh}{2}$

La soustraction de ces 2 équations donne :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{gh}{2} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{gh}{2} \quad \text{d'où} \quad V_2^2 - V_1^2 = 2gh$$

Soit $(V_2 - V_1)(V_2 + V_1) = 2gh$

$\boxed{V_2 - V_1 = \dfrac{2gh}{2V_0}}$ d'après l'équation (1)

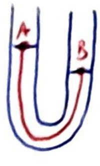
On a donc un système : $\begin{cases} v_2 + v_1 = 2v_0 \\ v_2 - v_1 = g\dfrac{h}{v_0} \end{cases}$

Sa résolution donne $\boxed{\begin{cases} v_1 = \left(1 - \dfrac{gh}{2v_0^2}\right) v_0 \\ v_2 = \left(1 + \dfrac{gh}{2v_0^2}\right) v_0 \end{cases}}$

Exercice 4 - Tube en U

1) Comme le tube est de section constante et le fluide incompressible, la conservation du débit volumique implique : $\vec{v} = \dot{h}\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire tangent aux parois en tout point du tube.

On intègre l'équation d'Euler entre les deux surfaces libre le long d'une ligne de courant :



$$\int_A^B \frac{D\vec{v}}{Dt}\cdot \vec{dl} = \int_A^B -\frac{1}{\mu}\,\vec{\text{grad}}\,P\cdot\vec{dl} + \int_A^B \vec{g}\cdot\vec{dl}$$

$$\int_A^B \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\vec{dl} + \int_A^B \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot\vec{dl} = -\frac{1}{\mu}\int_A^B \vec{\text{grad}}\,P\cdot\vec{dl} + \int_A^B \vec{g}\cdot\vec{dl}$$

Car $\int_A^B (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{dl} = 0$ sur une ligne de courant

- $\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{dl} = L \ddot{h}$

- $\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2}\right) \cdot \vec{dl} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} = 0$

- $\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\, P \cdot \vec{dl} = \int_A^B dP = P_B - P_A = 0$

- $\int_A^B \vec{g} \cdot \vec{dl} = \int_A^B -g\, dz = -2gh$

On obtient donc $L\ddot{h} = -2gh$ soit $\boxed{\ddot{h} + \frac{2g}{L} h = 0}$

On reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique

avec $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}}$

2) La situation représentée correspond à l'ascension du centre de masse du volume $Sh(t)$ d'une hauteur $h(t)$ (il passe de $-\frac{h}{2}$ à $+\frac{h}{2}$)

l'augmentation d'énergie potentielle associée est

$$\boxed{\Delta E_p = \mu S g h^2}$$

La variation d'énergie cinétique du fluide elle s'écrit $\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu S L \dot{h}^2}$

En l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve donc $\Delta E_m = 0 = \Delta E_p + \Delta E_c$

Ainsi on retrouve $\boxed{\ddot{h} + \frac{2g}{L} h = 0}$.

Approfondissements

Exercice 5 - Viscosimètre de Couette

1) le problème est invariant par rotation autour de l'axe Oz donc $\vec{v}$ ne dépend pas de θ

Si L est suffisamment grand, on peut négliger les effets de bords donc $\vec{v}$ ne dépend pas de z

Comme la vitesse du fluide doit être tangente aux cylindre à leur contact on peut supposer $\vec{v} \propto \vec{u_\theta}$

Rq : On peut aussi dire que les plans contenant l'axe Oz sont des plans d'antisymétrie du problème et par analogie avec le champ magnétique $\vec{B}$ leur est perpendiculaire.

2) $v(R_1) = R_1\omega$ et $v(R_2) = 0$ donc

$$\begin{cases} AR_1 + B = R_1\omega \\ AR_2 + B = 0 \end{cases}$$ on en déduit $A = -\dfrac{R_1\omega}{R_2 - R_1}$

$$B = \frac{+R_1R_2\omega}{R_2 - R_1}$$

d'où $$\boxed{\vec{v}(M,t) = R_1\omega\,\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\,\vec{u_\theta}}$$

3) La force élémentaire s'écrit $d\vec{F} = \eta\dfrac{dv}{dr}\,dS\,\vec{u_\theta}$

Avec dS une portion élémentaire de la surface du cylindre R_1 donc $dS = R_1\,d\theta\,dz$

d'où $$\boxed{d\vec{F} = -\eta\,\omega\,\frac{R_1}{R_2 - R_1}\,R_1\,d\theta\,dz\,\vec{u_\theta}}$$

4) $\boxed{d\vec{\mathcal{M}}_{(M)} = \vec{HM} \wedge d\vec{F}}$ où H est le projeté de M sur l'axe de rotation

$$d\vec{\mathcal{M}}(M) = -\eta\omega \frac{R_1^2}{R_2 - R_1} R_1 \, d\theta \, dz \, \vec{u_z}$$

On intègre sur z et θ pour obtenir le moment total

$$\vec{\mathcal{M}} = \iint -\eta\omega \frac{R_1^3}{R_2 - R_1} d\theta \, dz \, \vec{u_z}$$

$$= -\eta\omega \frac{R_1^3}{R_2 - R_1} \times \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \times \int_0^L dz \, \vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = -\frac{2\pi\eta L R_1^3}{R_2 - R_1} \vec{\omega}}$$

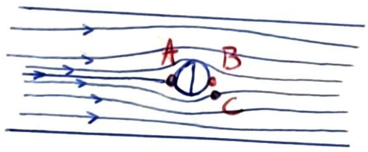
le moment est dans le sens opposé à $\vec{\omega}$, il est résistant.

5) Si la vitesse du cylindre intérieur est constante son moment cinétique aussi et un opérateur doit exercer un moment opposé à $\vec{\mathcal{M}}$ pour maintenir le cylindre 2 immobile, d'après le TMC. En mesurant le moment exercé on peut remonter à η

Exercice 6 - Tube de Pitot moyenné

1) les tubes de Pitot moyennés permettent en plus d'avoir une valeur moyenne de la vitesse de peu perturber l'écoulement et de fonctionner dans les deux sens d'écoulement.

2) et 3)



la ligne de courant passant par A doit s'arrêter sur l'obstacle car la composante normale est toujours nulle au contact de l'obstacle.

D'après le théorème de Bernoulli entre l'infini et A :

$$\frac{P_\infty}{\mu} + \frac{V^2}{2} + g z_A = \frac{P_A}{\mu} + \frac{0}{2} + g z_A$$

$$\boxed{P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\mu V^2}$$

4) Par le même argument que précédemment, B est au contact du solide donc $\underline{V_B = 0}$.

La sonde perturbant peu l'écoulement on peut supposer que pour les lignes de courant proche de B, $V_C \sim V$

et $P_C \sim P_\infty$. Si le fluide est immobile en B ; c'est qu'il est à l'équilibre mécanique donc que $P_B \sim P_C$

D'où $P_B \sim P_\infty$

5) La membrane est soumise à 3 forces :

$\vec{F}_{dyn} = P_A S \vec{e_x}$; $\vec{F}_{stat} = -P_B S \vec{e_x}$; $\vec{f} = -kx\vec{e_x}$

Son équilibre s'écrit $\boxed{\vec{F}_{dyn} + \vec{F}_{stat} + \vec{f} = \vec{0}}$

6) On a donc $P_A S - P_B S - kx = 0$

$$\left(P_\infty + \frac{1}{2}\mu V^2 - P_\infty\right) S - kx = 0$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2kx}{\mu S}}}$$

Exercice 7 - Viscosité et diffusion

1) La particule de fluide est soumise aux forces de viscosité et de pression :

$$\boxed{dm \frac{Dv_x}{Dt} = dF_{v_x} + dF_{p_x}}$$

$$dF_{v_x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dx\,dy\,dz \qquad \left(dF_{v_x} = f_{v_x}\, d\tau \right)$$ force volumique de viscosité

$$dF_{p_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\,dy\,dz \qquad \left(dF_{p_x} = f_{p_x}\, d\tau = (-\overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{e_x})\, d\tau \right)$$

$$dm = \mu\, d\tau = \mu\, dx\,dy\,dz$$

d'où $$\boxed{\mu \frac{Dv_x}{Dt} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}}$$

On aurait aussi pu tout simplement projeter l'équation de Navier-Stokes.

2) A priori la pression ne dépend que de z donc $\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 0}$

On obtient alors $$\mu \frac{Dv_x}{Dt} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Car $v_x(y,t)$

Finalement : $\boxed{\mu \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$

On reconnait une équation de diffusion du type $\boxed{\dfrac{\partial v_x}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0}$ avec $\boxed{D = \dfrac{\eta}{\mu}}$

il y a une diffusion de la vitesse longitudinale dans la direction Oy perpendiculaire au mouvement.

Plus η est grand plus cette diffusion est rapide.

3) $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\,\vec{u}_z$

Ainsi $\boxed{\Omega_z = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_x}{\partial y}}$

Si on dérive par rapport à y l'équation de diffusion précédente, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right) - D\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0$$

D'où d'après le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - D\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} - D\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2} = 0}$$

On retrouve une équation de diffusion.

Exercice 8 - Tourbillon de Rankine

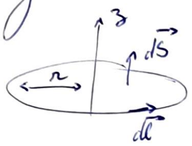
1) D'après le théorème de Green-Stokes

$$\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} = \iint \vec{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{dS} = \iint 2\vec{\omega}\cdot\vec{dS}$$

Le champ de vitesse est orthoradial donc

$$\oint \vec{v}\cdot\vec{dl} = \oint v\,dl = v\int_0^{2\pi} r\,d\theta = 2\pi r v$$

On a pris comme contour d'intégration un cercle de rayon r



$$\iint 2\vec{\omega}\cdot\vec{dS} = 2\omega_0\iint dS$$
$$= 2\omega_0 S$$
$$= 2\omega_0(\pi r^2)$$

Ainsi pour $r \leq a$ $\quad 2\pi r v = 2\pi\omega_0 r^2$

$$\boxed{v = \omega_0 r}$$

$r > a$ $\quad 2\pi r v = 2\pi\omega_0 a^2$ $\quad$ (car $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ seulement pour $r \leq a$)

$$\boxed{v = \frac{\omega_0 a^2}{r}}$$

2) l'équation d'Euler s'écrit :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}\, P + \mu \vec{g}$$

On est en régime stationnaire donc $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \vec{\text{rot}}\, \vec{v} \wedge \vec{v}$

d'où
$$\mu\, \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \vec{\text{grad}}\, P + \vec{\text{grad}}(\mu g z) + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{\text{grad}}\left(P + \mu g z + \mu \frac{v^2}{2}\right) + 2\mu\, \vec{\omega} \wedge \vec{v} = 0$$

En coordonnées cylindriques $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{u_z}$ et $\vec{v} = v \vec{u_\theta}$

donc $\boxed{2\mu\, \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2\mu\, \omega_0 v\, \vec{u_r}}$

la projection de l'équation précédente donne :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \mu g z + \mu \frac{v^2}{2}\right) = 2\mu \omega v \qquad (1) \\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(P + \mu g z + \mu \frac{v^2}{2}\right) = 0 \qquad (2) \end{aligned}}$$

Pour $r \leq a$, (1) $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu \frac{(\omega_0 r)^2}{2}\right) = 2\mu \omega_0^2 r$

D'où $\frac{\partial P}{\partial r} = 2\mu \omega_0^2 r - \mu \omega_0^2 r = \mu \omega_0^2 r$

En primitivant $P(r, z) = \mu \omega_0^2 \frac{r^2}{2} + f(z)$

Or en $r=0$, $P(0,z) = P_0 - \mu g(z+h)$ d'après la loi de statique des fluides

$P(0,z) = f(z)$ donc $\boxed{P(r,z) = P_0 - \mu g(z+h) + \mu \omega_0^2 \frac{r^2}{2}}$

Pour $r > a$, on procède de même mais $v = \omega_0 \frac{a^2}{r^2}$ et $\omega = 0$ donc :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \mu g z + \frac{\mu \omega_0^2}{2} \frac{a^4}{r^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{\mu \omega_0^2}{2} \frac{a^4}{r^2}\right) = 0$$

$$P + \frac{\mu \omega_0^2}{2} \frac{a^4}{r^2} = f(z)$$

Or pour $r \to \infty$, $P(\infty, z) = P_0 - \mu g z = f(z)$

D'où $\boxed{P(r,z) = P_0 - \mu g z - \frac{\mu \omega_0^2}{2} \frac{a^4}{r^2}}$

Si ω_0 est trop grand, P peut atteindre la pression de vapeur saturante et l'eau peut se vaporiser créant de bulles de vapeur, c'est la cavitation les deux expressions de pression doivent se raccorder en $r = a$ donc

$$P_0 - \mu g(h+z) + \mu \frac{1}{2} \omega_0^2 a^2 = P_0 - \mu g z - \mu \frac{1}{2} \omega_0^2 a^2$$

on en déduit $\boxed{h = \frac{\omega_0^2 a^2}{g}}$

Enfin on trouve l'équation de la surface libre par l'équation $P(r, z) = P_0$ donc

Pour $r \leq a$; $\boxed{z(r) = \frac{\omega_0^2 a^2}{g} \left(\frac{r^2}{2a^2} - 1 \right)}$

$r > a$; $\boxed{z(r) = - \frac{\omega_0^2 a^2}{g} \frac{a^2}{2r^2}}$

3) La dépression qui se crée selon r, sachant que $r<a$ s'écrit $\Delta P = P(r,z) - P_0 = -\mu g(h+z) + \mu \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2$

cette dépression est maximale en $z = -h$ donc

$\boxed{\Delta P_{max} = \mu \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2}$

Si on suppose que cette dépression s'applique à tout le toit :

$$F = \iint \Delta P_{max} dS = \int_0^R \mu \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 (2\pi r \, dr) = \frac{\pi}{4} \mu \, \omega_0^2 R^4$$

$F = 6700 N$

Pour $r = a$, $v_{max} = \omega_0 a$ d'où $\omega_{0 \, max} = \frac{v_{max}}{a} = 0,92 \, rad \cdot s^{-1}$ ↗