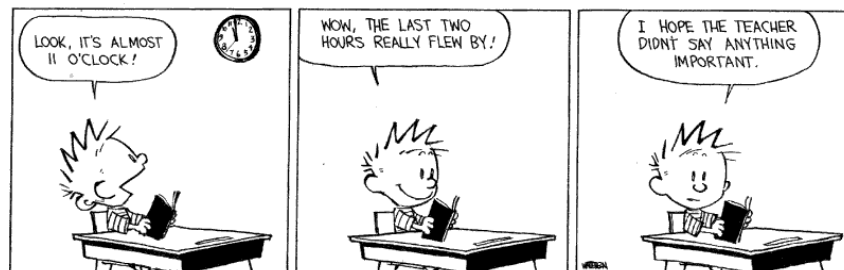

DS 5

Ondes mécaniques et mécanique des fluides

Vendredi 22 janvier 2021



PROBLEME A : LE MUR DE LA CATENAIRE

Le TGV a battu son propre record du monde de vitesse sur rail le 3 avril 2007 : 574,8 km/h. La tentative officielle de record s'est déroulée sur la nouvelle ligne Est européenne entre Paris et Strasbourg. Pour réaliser cet exploit, les ingénieurs de la SNCF ont dû tendre plus que d'habitude le câble électrique qui est suspendu au dessus des voies ferrées et que l'on appelle caténaire.

Equation de propagation d'une onde sur un câble

On considère un câble de masse linéique μ tendu entre deux extrémités A et B sous une tension T_0 . Au repos, le câble est horizontal : on néglige la force de pesanteur devant la force de tension. Un ébranlement $y(x,t)$ se propage le long du câble à la célérité v que l'on se propose de calculer. Pour cela, on isole une portion de câble de longueur ds comprise entre les points G et D (d'abscisses x et $x+dx$). Cette portion est soumise aux forces de tensions $-\vec{T}(x,t)$ et $\vec{T}(x+dx,t)$. On appelle $\alpha(x,t)$ (resp. $\alpha(x+dx,t)$) l'angle que fait la tension $-\vec{T}(x,t)$ (resp. $\vec{T}(x+dx,t)$) par rapport à l'horizontale (figure 1). La corde reste dans le plan vertical au cours du mouvement.

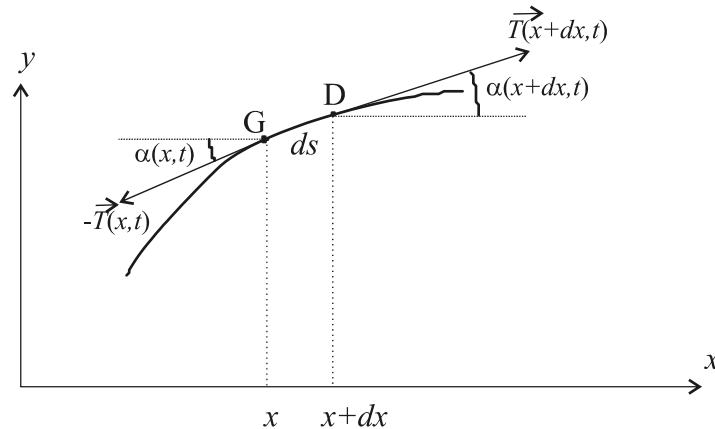


Figure 1 : déformation du câble

- A.1** Quelle est la masse, en fonction de dx notamment, du petit morceau de câble GD ? Sans calcul, décrire le mouvement de ce petit morceau.
- A.2** En projetant le principe fondamental de la dynamique (ou seconde loi de Newton) selon x et y , et en supposant que la déformation est petite (l'angle $\alpha(x,t)$ est très petit devant 1 radian), montrer que : $\|\vec{T}(x,t)\| = \|\vec{T}(x+dx,t)\| = T_0$ et $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}$
- A.3** En déduire que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. On précisera l'expression de v . Que représente physiquement cette grandeur ? Montrer que l'expression est dimensionnellement correcte.

Tension d'une caténaire

Dans cette partie, le câble est au repos. Il s'agit d'étudier la manière dont on le tend.

- A.4** Schématiquement, la caténaire est tendue entre deux poteaux par un ensemble de poids en béton identiques (chacun de masse M) comme indiqué par la figure 2. Le câble est de masse négligeable devant les masses M et il est inextensible. Les poulies sont de masse négligeable et peuvent tourner sans frottement autour de leurs axes.

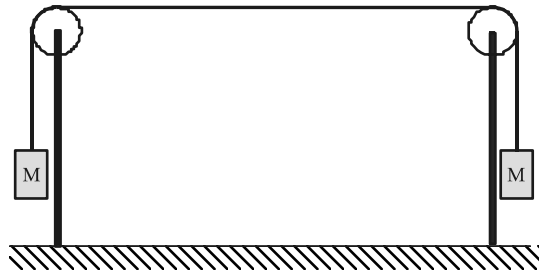


Figure 2 : schéma de principe de la tension d'une caténaire

Exprimer simplement la tension T_0 de la caténaire en fonction de M et de l'accélération de la pesanteur g .

En pratique, la tension est assez élevée : il faudrait des masses de béton élevées, ce qui coûte cher et est très encombrant. Il faut donc utiliser un système de « démultiplication des forces » à l'aide de poulies.

- A.5** On considère le dispositif de la figure 3. Les deux poulies sont de masse négligeable et tournent sans frottement autour de leurs axes. La poulie n°1 est accrochée au support horizontal grâce à une tige (en trait épais). La masse d'épreuve K est solidaire de la poulie n°2 par l'intermédiaire d'une tige de masse négligeable (en trait épais). La masse M est soutenue par un fil de masse négligeable, inextensible, s'enroulant autour des deux poulies. Le système est à l'équilibre.

Calculer K en fonction de M pour qu'il en soit ainsi.

Définir le « facteur de démultiplication » dans ce cas et donner sa valeur.

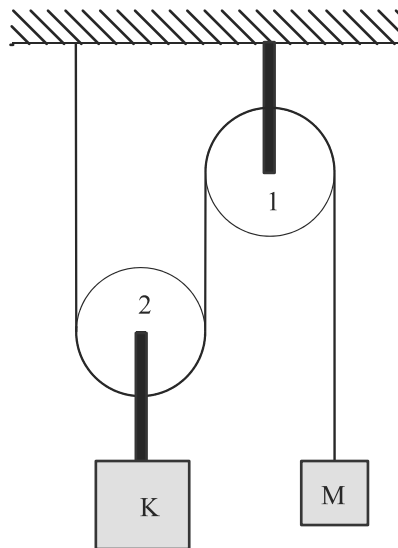


Figure 3 : palan à deux poulies

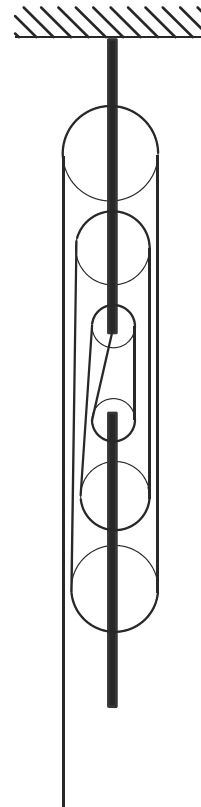


Figure 4 : palan à six poulies

- A.6** On considère maintenant le dispositif de la figure 4. Pour simplifier, on supposera que les brins de fil sont quasi verticaux (les angles par rapport à la verticale sont très petits). Calculer le facteur de démultiplication dans ce cas. On supposera que c'est ce type de palans qui est utilisé pour tendre la caténaire du TGV.

Application à la caténaire du record de vitesse de 2007

Une caténaire de TGV est constituée d'un câble profilé de cuivre pur d'une section de 150 millimètres carrés, soutenu par un câble porteur en bronze. La densité du cuivre par rapport à l'eau est de 8,9. La tension du câble est de 2600 daN (decanewton). Le pantographe (dispositif situé au dessus de la locomotive) balaie la caténaire de façon à capter l'énergie électrique : il soulève la caténaire afin de créer un bon contact électrique. La caténaire adopte la forme d'un V renversé dont la pointe est soutenue par le pantographe. Lorsque le train se déplace, le V renversé se déforme et des ondulations sont transmises dans la caténaire. Cette dernière se soulève alors jusqu'à plus de 30 centimètres. Les ingénieurs estiment que le TGV ne doit pas dépasser 97 % de la vitesse de propagation des ondes, pendant un court laps de temps, pour qu'il n'y ait pas de problèmes d'avarie.

- A.7** Calculer la valeur numérique de la masse linéique de la caténaire ainsi que la célérité des ondes transverses le long de la caténaire.
- A.8** Proposer deux solutions pratiques pour « repousser le mur de la caténaire ». Quelle est la plus simple à mettre en œuvre ?
- A.9** Pour réaliser le record de 2007, avec quelle tension minimale doit-on tendre la caténaire (tout du moins au niveau des endroits où le record aura lieu) ? Sachant que la caténaire est tendue par des palans à six poulies, quelle masse de béton a dû être rajoutée à l'extrémité de chaque palan ? Pour l'application numérique on prendra pour simplifier $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

PROBLEME B : CÔNE DE MACH

- B.1** L'air est composé en première approximation de 20 % de dioxygène et de 80 % de diazote. La masse molaire de l'oxygène est $16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et la masse molaire de l'azote est $14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Quelle est la masse molaire moyenne de l'air ?
- B.2** La célérité du son dans un gaz parfait dépend de la température T , de la masse molaire M et de la constante R des gaz parfaits. Proposer, par analyse dimensionnelle, une relation donnant la vitesse du son dans le gaz. On écrira la célérité du son sous la forme $c = T^a M^b R^d$ où l'on précisera la valeur numérique des trois exposants a , b et d .
- B.3** En fait, dans la relation de la célérité du son, on doit multiplier la constante R par le coefficient numérique 1,4. Que représente ce coefficient numérique ? Pourquoi vaut-il 1,4 ?
- B.4** Application numérique : calculer la célérité du son en km/h pour de l'air à une température de -20°C . On rappelle que $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- B.5** Considérons un avion de chasse volant à la vitesse *mach* 2 dans un air à -20°C . Cela signifie qu'il vole à deux fois la vitesse du son. Quelle est sa vitesse en km/h ?

- B.6** Ce même avion génère des ondes sonores. On va supposer que ces ondes sont émises de manière isotrope dans le référentiel de l'avion et que l'avion est ponctuel. Ainsi tout se passe comme si l'on avait une source sonore ponctuelle. L'air dans lequel se propage le son est immobile. Comment peut-on qualifier *géométriquement* ces ondes ?
- B.7** L'avion se déplace à la vitesse v le long de l'axe des x . On prendra l'origine des temps à l'instant où l'avion passe par $x = 0$. En quelle abscisse x_τ se trouvait l'avion à l'instant $-\tau$? Quel est, à l'instant $t > 0$, le rayon de la surface d'onde sonore émise à l'instant $-\tau$ par l'avion à l'abscisse x_τ . On exprimera ce rayon en fonction de τ , t et de la célérité du son c .
- B.8** Le système possède une invariance par rotation autour de l'axe (Ox) , il est donc intéressant d'utiliser les coordonnées cylindriques ρ, θ, x . Dédurre de la question **B.7** l'équation cartésienne de cette même surface d'onde. On mettra l'équation sous la forme $\rho = f(x, t, \tau)$ de cette même surface d'onde.
- B.9** Si la vitesse v de l'avion est supérieure à la célérité c du son, l'énergie sonore va s'accumuler sur la surface enveloppe des surfaces d'onde décrites ci-dessus (voir la figure 5).

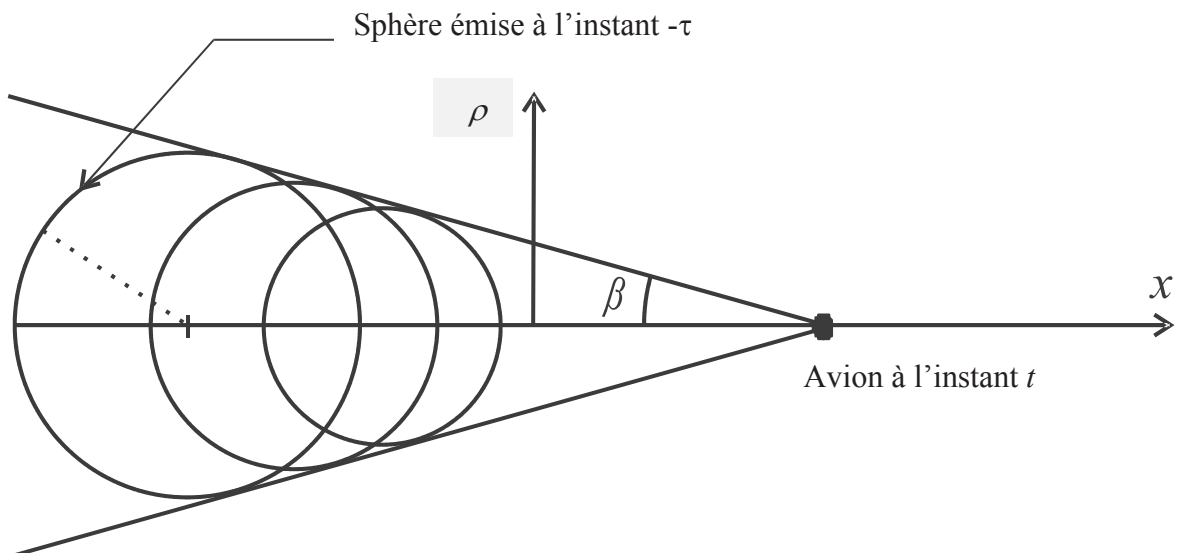


Figure 5 : cône de Mach

On admettra que la surface enveloppe doit vérifier le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f(x, t, \tau) = \rho & (1) \\ \frac{\partial f(x, t, \tau)}{\partial \tau} = 0 & (2) \end{cases}$$

A partir de l'équation (2), exprimer τ en fonction de v, c, x, t . Injecter cette relation dans l'équation (1) et montrer que, si $v > c$, alors l'équation de la surface enveloppe est : $\rho = \psi \cdot (vt - x)$ où l'on donnera ψ en fonction de v et c .

- B.10** En déduire que, si $v > c$, l'énergie sonore se concentre sur un cône de demi-angle au sommet β dont on exprimera le **sinus** en fonction de v et c .
- B.11** Avec les valeurs numériques de la question **B.4**, calculer numériquement l'angle β .

B.12 L'avion vole à la vitesse v à une altitude h . Un observateur P est sur la surface de la terre. Donner la relation reliant l'intervalle de temps Δt qui sépare les deux événements E1 et E2 suivants :

E1 : l'avion passe au dessus de la tête de P,

E2 : P entend le « bang » du mur du son.

On exprimera l'intervalle Δt en fonction de h , v et c .

PROBLEME C : LE SILLAGE DE LORD KELVIN

Curieusement, un canard et un pétrolier créent un sillage de même forme dans l'eau (figure 6). De plus, l'angle de ce sillage ne dépend pas de la vitesse de l'objet qui se déplace.

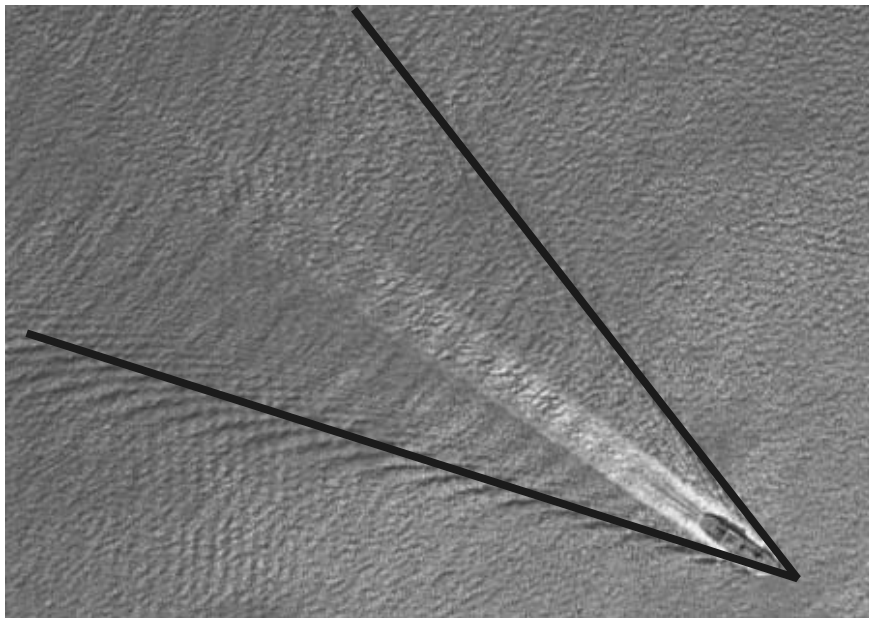


Figure 6 : photographie aérienne du sillage d'un pétrolier

Ondes de gravité

On rappelle l'équation d'Euler pour un fluide de masse volumique ρ et non visqueux :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

A l'équilibre, la surface libre d'une étendue d'eau, plane et horizontale (formant le plan $z = 0$) sépare l'atmosphère (région $z > 0$ où la pression est uniforme et vaut P_0) et l'eau, liquide supposé parfait et incompressible de masse volumique ρ . L'étendue d'eau est très profonde (profondeur H très grande devant la longueur d'onde des ondes de gravité). On se propose d'étudier la propagation suivant la direction Ox d'une onde de gravité d'amplitude a très inférieure à la longueur d'onde λ . La surface libre de l'eau est déformée par rapport à la surface à l'équilibre : cette surface a pour équation $z = \xi(x, t)$ (voir la figure 7).

Le champ de vitesse est à l'instant t dans le référentiel lié au fond du bassin :

$$\vec{v} = v_x(x, z, t)\vec{e}_x + v_z(x, z, t)\vec{e}_z$$

La pression au sein du liquide est $P(x, z, t) = P_e(z) + \tilde{p}(x, z, t)$ où $P_e(z)$ est la pression du liquide à l'équilibre en l'absence de vagues et $\tilde{p}(x, z, t)$ désigne la perturbation de la pression par rapport à l'équilibre.

Pour terminer, le champ de pesanteur est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

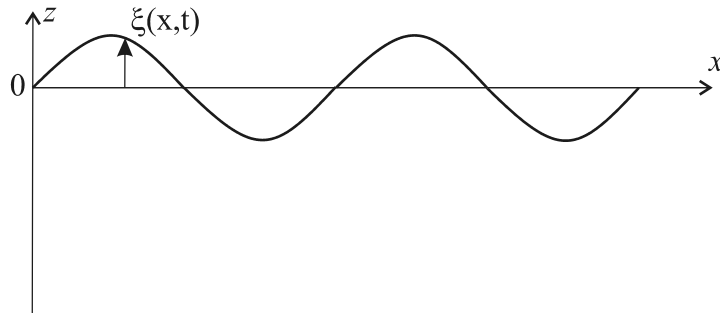


Figure 7 : ondes de gravité

C.1 A quelles conditions le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$ est-il négligeable devant le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$? On supposera ces conditions vérifiées pour la suite du problème.

C.2 Que devient l'équation d'Euler dans le cas où le fluide est à l'équilibre ? En déduire le champ de pression $P_e(z)$.

On se limite aux perturbations sinusoïdales du système. On utilise alors la notation complexe :

$$\underline{\tilde{p}} = f(z)e^{j(\omega t - kx)}, \quad \underline{\vec{v}} = \vec{v}(z)e^{j(\omega t - kx)}, \quad \underline{\xi}(x, t) = a e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec } j^2 = -1.$$

C.3 En utilisant l'équation d'Euler et l'équation différentielle de conservation de la masse, montrer que $\rho \frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} \underline{\tilde{p}}$ puis que $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - \beta^2 f(z) = 0$ où β est un paramètre à exprimer en fonction de k (vecteur d'onde).

C.4 Montrer alors que la perturbation de la pression réelle s'écrit $\tilde{p}(x, z, t) = p_1 e^{kz} \cos(\omega t - kx)$ où l'on ne cherchera pas à déterminer la constante p_1 .

C.5 En traduisant la continuité de la pression de part et d'autre de l'interface eau/air déformée et dans l'hypothèse où $e^{ka} \approx 1$, montrer que $a = \frac{p_1}{\rho g}$.

- C.6** En reprenant l'équation $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{p}$, montrer que la composante selon z du champ de vitesse vaut $\underline{v_z} = -\frac{1}{j\omega\rho} h(z) e^{j(\omega t - kx)}$ où l'on explicitera $h(z)$ en fonction de z, p_1, k .
- C.7** Quelle est la relation entre $\xi(x, t)$ et la composante selon z du gradient de champ de pression à l'interface eau/air ? En déduire que $\omega = (g \cdot k)^\alpha$ où l'on précisera la valeur numérique de α .
- C.8** Par analyse dimensionnelle, retrouver l'expression précédente $\omega = (g \cdot k)^\alpha$ en précisant la valeur numérique de α .
- C.9** Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes de gravité en fonction de g et du vecteur d'onde k . Quelle est la relation simple qui relie la vitesse de phase à la vitesse de groupe ?

PROBLÈME D : ECOULEMENT D'EAU DANS UN CANAL RECTILIGNE

Ce problème comporte de nombreuses questions indépendantes.

Nota Bene : dans tout ce problème, l'eau est traitée comme un fluide parfait et incompressible.

D.1 MESURE DE DÉBIT

Soit un canal horizontal à section rectangulaire de côté $L = 4$ m, parcouru par de l'eau de masse volumique ρ , avec une vitesse v uniforme et constante sur toute une section droite du canal. La hauteur de l'eau est notée h , supposée constante dans un premier temps.

- D.1.a** Rappeler, sans démonstration, l'équation locale de conservation de la masse dans le cas d'un fluide quelconque.
- D.1.b** Que peut-on en déduire concernant le champ de vitesse pour l'eau ? Que dire aussi du débit volumique Q ?
- D.1.c** Donner alors l'expression du débit volumique Q en fonction des variables du problème.
On place un tube de verre coudé dans l'eau comme suit :

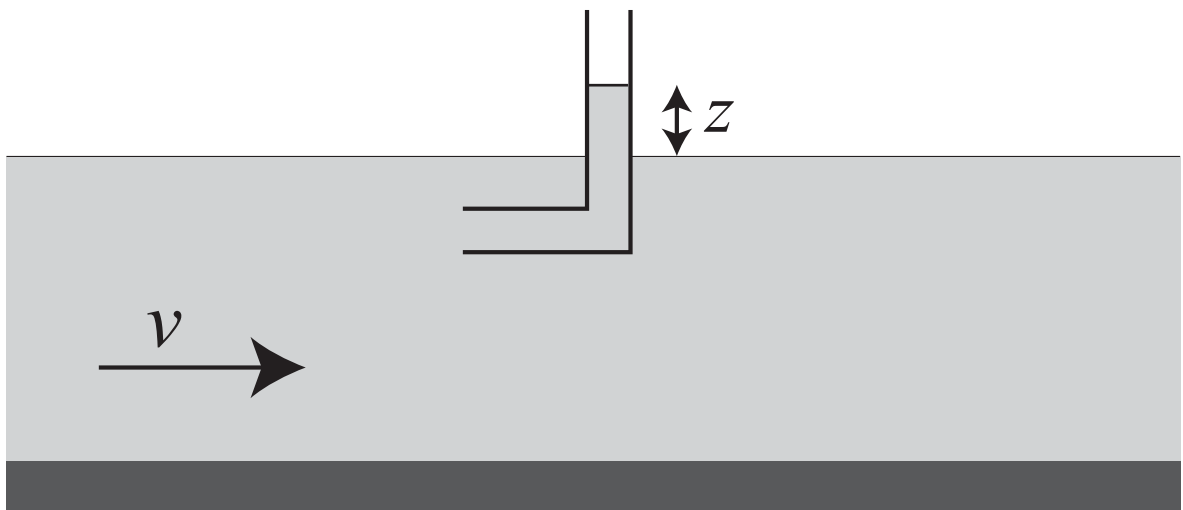


Fig. 1. – Géométrie de l'écoulement.

On appelle z la hauteur de la colonne d'eau dans le tube par rapport à la surface libre du canal.

- D.1.d** Rappeler l'énoncé du théorème de Bernoulli avec les hypothèses sous-jacentes.
- D.1.e** Exprimer alors la vitesse v du courant en fonction de z et de g , accélération de la pesanteur.
- D.1.f** On mesure une hauteur $z = 10$ cm. La hauteur d'eau h vaut 3 m. Calculer alors numériquement le débit volumique de ce canal. On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

D.2 RÉGIMES D'ÉCOULEMENT DANS LE CANAL

La hauteur h de l'eau circulant dans le canal n'est plus constante maintenant.

- D.2.a Que dire de la quantité e définie par $e = gh + v^2/2$ sur tout le long du canal ? Justifier votre réponse.
- D.2.b Quelle signification physique voyez-vous pour la quantité e ? Donner la valeur numérique de e en prenant les valeurs numériques prises précédemment dans la question B.1.f.
- D.2.c Exprimer le débit Q en fonction de la largeur du canal L , de h , e et g .
- D.2.d Représenter, sur la copie, l'allure de la courbe du débit en fonction de h , et montrer que, pour un débit donné, il y a deux profondeurs h_T et $h_F > h_T$ possibles. On ne cherchera pas à calculer ces profondeurs !
- D.2.e Calculer la hauteur critique h_c du canal qui correspond à un débit maximal. On exprimera cette hauteur critique en fonction de e et g . Faire l'application numérique.
- D.2.f En déduire la vitesse v_c de l'écoulement quand la hauteur du canal est égale à h_c .
- D.2.g Les profondeurs h_T et h_F correspondent à deux régimes d'écoulement dans le canal. Caractérissez ces deux régimes. Quels noms peut-on leur donner ?

D.3 GÉNÉRATION D'UNE ONDE DE RESSAUT

A un instant donné, le canal est obturé à un endroit par une paroi verticale. Une vague remonte alors le canal à la vitesse w mesurée dans le référentiel terrestre.

La hauteur d'eau en amont du ressaut est h , et la vitesse du courant est v . En aval du ressaut, la hauteur d'eau est h' constante.

On étudie dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, le **système fermé (S)** de fluide délimité par les sections (en pointillés sur le dessin) amont S_1 et S_2 . On supposera que l'on peut encore calculer les forces de pression dues à la colonne d'eau comprise entre S_2 et la paroi. Pour simplifier, on supposera que le front de la vague est vertical.

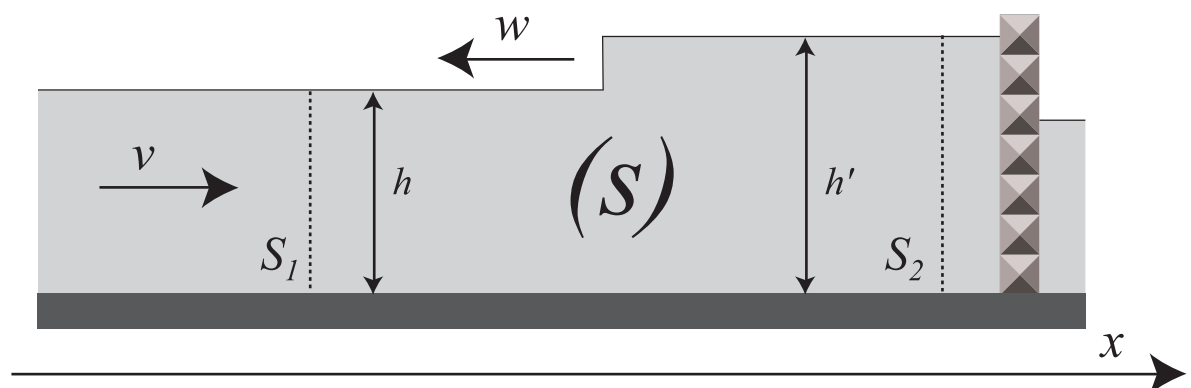


Fig. 2. – Génération d'une onde de ressaut.

- D.3.a** En traduisant la conservation de la masse du système (S) , établir une relation entre v , w , h et h' .
- D.3.b** Faire, sur la copie, un dessin du système (S) à l'instant t et à l'instant $t+dt$. On pourra griser ou hachurer le fluide déplacé. En déduire la variation de la composante horizontale de la quantité de mouvement du système (S) pendant la durée dt . On montrera qu'elle s'écrit sous la forme $\frac{dP_x}{dt} = -\rho L h \times g(v, w)$ où $g(v, w)$ est une fonction de v et w que l'on explicitera. On supposera que la vitesse v du fluide est nulle en S_2 .
- D.3.c** La pression étant P^o sur la surface de l'eau en écoulement, calculer, en fonction de la profondeur, la pression qui règne dans l'eau, en appliquant la relation fondamentale de la statique des fluides.
- D.3.d** Soit une paroi rectangulaire plongée dans l'eau, de largeur L et de hauteur h . Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur cette paroi. Exprimer le résultat en fonction de L , h , ρ , P^o et g . On pourra introduire un vecteur $\vec{n}$ normal à la paroi que l'on exprimera en fonction du vecteur unitaire $\vec{e}_x$ de l'axe (Ox) .
- D.3.e** Que vaut la résultante des forces de pression sur la section gauche S_1 de (S) ? Même question pour la section droite S_2 de (S) et pour le front de vague qui est supposé vertical. En déduire l'expression de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur (S) , en fonction de ρ , g , L , h et h' .
- D.3.f** En déduire alors que $h(v+w)v = g/2 \times f(h', h)$, où f est une fonction de h et h' que l'on précisera.
- D.3.g** Déduire des relations obtenues en **B.3.a** et **B.3.f** la célérité w de la vague en fonction de g , h et h' .
- D.3.h** Si on fait $h \approx h'$, que retrouve-t-on ?

Fin de l'énoncé.