TD 16

Electrostatique

Questions de cours

- Décrire les différentes distributions de charges possibles. Comment s'écrit dq dans chacun des cas
- Comment s'écrit la loi de Coulomb dans un milieu
- Donner l'expression du champ électrostatique créé par les différentes distribution (discrète ou continue)
- Définir une ligne de champ et un tube de champ.Quelle équation donne la forme des lignes de champ ?
- Comment evoluent les lignes de champ au voisinage d'une charge positive / négative
- Comment se comportent les lignes de champ lorsque le champ est intense ?
- Comment est le champ par rapport à un plan de symétrie / d'antisymétrie de la distribution de charge ?
- Citer le principe de Curie
- Définir la circulation du champ electrostatique. Pourquoi dit-on qu'elle est conservative ?
- Définir le potentiel electrostatique. Donner la relation entre potentiel et champ electrostatique
- Définir le flux du champ électrostatique
- Donner le théorème de Gauss
- Expliquer les différentes analogies entre l'electrostatique et la gravitation
- Définir le moment dipolaire
- Donner l'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle électrostatique et un champ extérieur
- Expliquer l'origine des trois forces de Van der Waals.

Applications directes du cours

Exercice 1 - Découpages usuels - ♥♥♥/ ★

Indiquer pour chaque distribution le découpage adapté aux symétries du problème, et donner la charge élémentaire correspondante :

1. Distributions linéiques
   (a) Fil porté par l'axe (Oz) chargé uniformément en longueur (λ).
   (b) Arc de cercle de rayon R chargé uniformément en longueur (λ).
2. Distributions surfaciques
   (a) Cylindre de rayon R et d'axe (Oz) uniformément chargé en surface (σ).

   (b) Disque de rayon R et de centre O uniformément chargé en surface (σ).
   (c) Sphère de rayon R et de centre O portant la charge surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, avec $\theta = (Ox, OM)$.
3. Distributions volumiques
   (a) Cylindre de rayon R et d'axe (Oz) chargé en volume avec la densité $\rho(r, \theta, z) = \rho_0 \dfrac{a}{|z|}$.
   (b) Cylindre de rayon R et d'axe (Oz) chargé en volume avec la densité $\rho(r, \theta, z) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.
   (c) Sphère de rayon R et de centre O uniformément chargée en volume (ρ).

Exercice 2 - Cube chargé - ♥/ ★

On considère un cube de centre O et de côté a, chargé sur deux de ses faces opposées (en $z = -\dfrac{a}{2}$ et en $z = \dfrac{a}{2}$) avec des densités surfaciques de charges uniformes, mais opposées (respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$)
Déterminer les symétries et invariances d'une telle distribution.

Exercice 3 - Effet de pointe - ♥♥/ ★★

Dans cet exercice on cherche à montrer que, pour un potentiel donné,le champ à proximité d'une surface est d'autant plus intense que la surface est "pointue", c'est-à-dire que son rayon de courbure est faible. Ce phénomène s'appelle "pouvoir des pointes" et s'applique particulièrement aux surfaces des conducteurs à l'équilibre électrostatique dont la surface est équipotentielle.Il explique notamment que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus.
On modélise le conducteur par une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée en surface, au potentiel V. Afin de relier le champ au voisinage de la surface et le potentiel, on calcule d'abord le champ créé par une distribution surfacique homogène de densité σ puis on en déduit le potentiel

1. Calculer le champ électrique créé en un point M extérieur à la sphère ($r > R$) et en un point M intérieur à la sphère ($r < R$).
2. En déduire l'expression du potentiel $V(r)$, en choisissant $V = 0$ à l'infini.
3. En déduire une relation entre le champ et le potentiel en $r = R$. Conclure

Exercice 4 - Moment dipolaire molécule d'eau - ♥♥♥/ ★

Dans la molécule H_2O la distance $O - H$ est $a = 97\ pm$ et l'angle entre les deux liaisons vaut $\theta = 104,30°$. L'oxygène étant plus électronégatif que l'hydrogène, ce dernier possède seulement une charge $e/3$.

Déterminer le moment dipolaire de l'eau en $C.m^{-1}$ et en Debye.

Approfondissement

Exercice 5 - Energie de formation - ♥♥♥/ ★★

On cherche à exprimer l'énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée, c'est à dire l'énergie qu'il faut fournir pour la construire en prenant toutes les charges qui la composent à l'infini. Cette sphère chargée peut modéliser un noyau atomique.

1. L'énergie recherchée dépend de la charge Q, du rayon R et de ϵ_0. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de $\mathcal{E}$ à une constante sans dimension α près.

   L'énergie de constitution est définie comme le travail qu'il faut fournir pour construire la sphère en prenant les charges à l'infini. On choisit pour la construire d'apport les charges de façon infiniment lente et par couche sphérique concentriques successives
2. En supposant qu'une sphère de rayon r a déjà été construite, déterminer le travail a fournir pour y ajouter une couche sphérique d'épaisseur dr. Commenter son signe.
3. En déduire l'énergie totale nécessaire pour construire la sphère de rayon R ainsi que la valeur de la constante α.
4. En supposant que cette énergie décrit bien l'énergie associée à un noyau atomique, déterminer sa valeur pour l'atome de Cobalt. On donne $A_{Co} = 60$, $Z_{Co} = 27$ et $R_{Co} = 1,3.10^{-15}\ m$. Justifier que la prise en compte de l'interaction électrostatique seule ne permet pas d'expliquer la stabilité du noyau atomique.

Exercice 6 - Un fil et un cylindre - ♥/ ★

On considère la distribution $(\mathcal{D})$ constituée par la réunion d'un fil infini (Oz) chargé avec la densité linéique uniforme $\lambda > 0$, et d'un cylindre infini de rayon R, d'axe (Oz), chargé avec la densité surfacique uniforme $\sigma > 0$.

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.
2. Représenter graphiquement la fonction $\|\vec{E}(M)\|$ en fonction de la coordonnée d'espace dont elle dépend.
3. Commenter la continuité du champ électrostatique.

Exercice 7 - Condensateur plan - ♥♥♥/ ★★

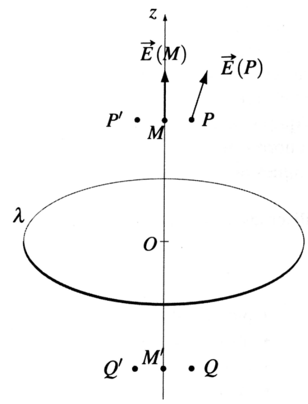
1. Exprimer le champ créé par une plaque infinie dans le plan (yOz) uniformément chargée en surface avec la densité $\sigma > 0$.

   Calculer $\|\vec{E}\|$ pour $\sigma = 7,11.10^{-5}$ C $^{-2}$m. On rappelle que $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,0.10^9$ S.I.

   On considère maintenant deux plaques infinies parallèles : A dans le plan yOz uniformément chargée en surface avec la densité surfacique de charges $\sigma > 0$ et B, dans le plan d'équation $x = e$, chargée avec la densité surfacique de charges $-\sigma$.
2. Exprimer les champs $\vec{E}_A$ et $\vec{E}_B$ créés en tout point de l'espace par les plaques A et B.
3. En utilisant le théorème de superposition, exprimer le champ $\vec{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur des deux plaques. Dessiner quelques lignes de champ.
4. Déterminer l'expression de la différence de potentiel $V_A - V_B$. Calculer $V_A - V_B$ pour $\sigma = 7,11.10^{-5}$ C $^{-2}$m et $e = 5,0$ µm.
5. Sur chacun des plans, isolons deux régions identiques d'aire S en regard. En déduire la capacité C du condensateur ainsi formé.
6. Exprimer la force électrostatique $\vec{F}$ qui s'exerce sur la surface S d'une plaque en fonction de σ, ε_0 et S. On en précisera le sens et la direction.
7. En déduire alors l'expression de la pression électrostatique P_{el}, celle-ci étant la force qui s'exerce sur l'unité de surface. Calculer P_{el} pour $\sigma = 7,11.10^{-5}$ C $^{-2}$m.

Exercice 8 - Anneau chargé - ♥♥/ ★★★

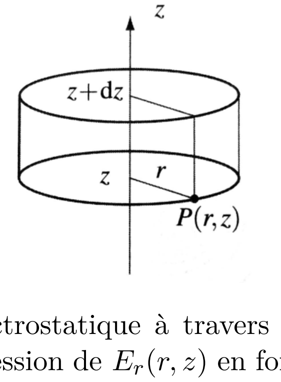
On considère un cerceau d'axe (Oz) et de rayon a, chargé uniformément (densité linéïque de charge λ).



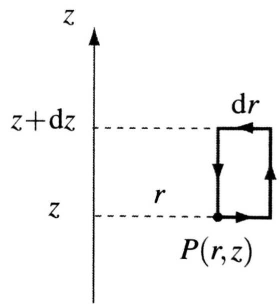
Le champ sur l'axe de l'anneau, en un point M de cote z, est de la forme $\overrightarrow{E} = E_0(z)\vec{u}_z$. L'expression de la fonction $E(z)$ est ici inutile pour résoudre l'exercice.
On s'intéresse au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calculer donc le champ en un point P défini par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec $r \ll a$.
De manière générale,

$$\overrightarrow{E}(P) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{u}_z$$

1. Montrer, par des arguments de symétrie très précis, qu'en P, $E_\theta(r,\theta,z) = 0$.
2. Montrer que la norme de $\overrightarrow{E}(P)$ ne dépend que de r et z.
3. Montrer que le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée située au voisinage de l'axe est nul. Que peut-on dire de sa circulation le long d'un contour fermé ?
4. On choisit r et dz tels que $\dfrac{r}{L^\star}$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{L^\star}$ soient des infiniment petits du premier ordre, où $L^\star$ est la distance caractéristique des variations spatiales des composantes du champ $\overrightarrow{E}$.



5. Calculer le flux du champ électrostatique à travers le cylindre représenté sur la figure précédente et en déduire l'expression de $E_r(r,z)$ en fonction de $E_0(z)$ et/ou de sa dérivée.
6. Justifier le fait que $E_r(r,z) - E_z(0,z)$ est au moins d'ordre deux en r.
7. On considère le rectangle ci dessous :



On a choisi $\dfrac{r}{L^\star}$ infiniment petit d'ordre 1 et $\dfrac{\mathrm{d}r}{L^\star}$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{L^\star}$ infiniment petits d'ordre 2.

En calculant la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de ce rectangle, montrer que

$$E_z(r,z) = E_z(0,z) - \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2E_0(z)}{\mathrm{d}z^2}$$

8. Récapituler l'expression de $\overrightarrow{E}(P)$ au premier ordre en r, puis au deuxième ordre en r.

Élements de réponse

1. 1a : $dq = \lambda dz$; 1b : $dq = \lambda R d\theta$;
   2a : $dq = 2\pi\sigma R dz$; 2b : $dq = 2\pi\sigma r dr$; 2c : $dq = 2\pi R^2 \sigma_0 \cos\theta \sin\theta d\theta$;
   3a : $dq = \pi R^2 \rho_0 \dfrac{a}{|z|} dz$; 3b : $dq = 2\pi h \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{R}\right) r dr$; 3c : $dq = 4\pi\rho r^2 dr$
2. (xOy) : antisymétrie ; (xOz), (yOz) et plans diagonaux : symétrie
3. $\overrightarrow{E}(M_{int}) = \vec{0}$, $\overrightarrow{E}(M_{ext}) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$
   $V(M_{ext}) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$ et $V(M_{int}) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$
   $E(M) = \dfrac{V(M)}{R}$ au voisinage de la sphère.
4. $p = 1,9\ D$
5. $\mathcal{E} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R} = 1,2.10^2\ MeV$ pour le cobalt
6. $\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{si} \quad r < R, \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{si} \quad r > R. \end{cases}$
   Le champ est discontinu en $r = R$.
7. $\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$; $\|\vec{E}\| = 4,0.10^6\ V.m^{-1}$
   $V_A - V_B = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0} = 40$ V ; $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$
   $\vec{F}_{A\to B} = -\dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x = -\vec{F}_{B\to A}$
   $P_{el} = \dfrac{\|\vec{F}\|}{S} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = 2,9.10^2\ N.m^{-2}$
8. Le flux est nul d'après le théorème de Gauss. $E_r(r,z) = -\dfrac{r}{2} E_0'(z)$.
   La circulation nulle donne $\dfrac{\partial E_z}{\partial r}(r,z) = \dfrac{\partial E_r}{\partial z}(r,z)$.
   Au premier ordre en r : $\overrightarrow{E} = -\dfrac{r}{2} E_0'(z) \vec{u}_r + E_0(z) \vec{u}_z$.
   Au deuxième ordre en r : $\overrightarrow{E} = -\dfrac{r}{2} E_0'(z) \vec{u}_r + \left(E_0(z) - \dfrac{r^2}{4} E_0''(z)\right) \vec{u}_z$.