
TD16

Electromagnétisme

Correction

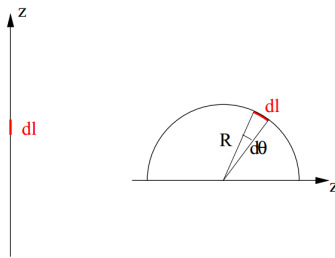
Applications directes du cours

Exercice 1 - Découpages usuels

Le découpage que l'on va choisir pour chaque distribution doit refléter les symétries du problème. On commence donc par analyser les symétries de la distribution, puis on choisit le système de coordonnées adapté, et enfin, le découpage, en longueur, surface ou volume, adapté à la situation.

1. Distributions linéiques : la charge élémentaire est donnée par $dq = \lambda d\ell$.

- (a) L'élément de longueur le long de l'axe (Oz) est simplement $d\ell = dz$ et $dq = \lambda dz$
- (b) L'élément de longueur le long d'un arc de cercle de rayon R est donné par $d\ell = R d\theta$ où θ est l'angle polaire repérant le point P sur lequel est centré l'élément de longueur. On a alors $dq = \lambda R d\theta$



2. Distributions surfaciques : la charge élémentaire est donnée par $dq = \sigma dS$.

- (a) On découpe le cylindre surfacique en couronnes d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur dz . L'élément de surface est donc $dS = 2\pi R \times dz$, car le périmètre du cercle est $2\pi R$ ¹ : $dS = 2\pi R dz$ et $dq = 2\pi \sigma R dz$

- (b) On découpe le disque en couronnes comprises entre deux cercles concentriques de rayons respectifs r et $r + dr$. On a donc une surface élémentaire² $dS = 2\pi r dr$

La charge élémentaire est alors $dq = 2\pi \sigma r dr$

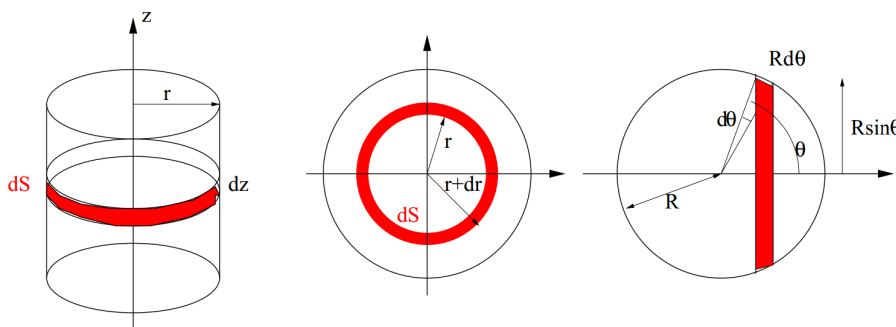
1. D'un élément de surface général (doublement élémentaire) $d^2S = R d\theta dz$ correspondant à une surface à $r = R$ constant, on en déduit, par intégration de la coordonnée θ de 0 à 2π une surface simplement élémentaire $dS = \int_0^{2\pi} d^2S = 2\pi R dz$. On peut réaliser une telle intégration puisque la distribution est invariante par rotation autour de (Oz), et est donc indépendante de la coordonnée θ . Tous les points de la couronne portent la même densité surfacique de charges.

2. On peut obtenir ce résultat en différenciant la surface du disque de rayon r : $S = \pi r^2$ donc $dS = \pi 2r dr$. On peut aussi partir d'un élément de surface doublement élémentaire $d^2S = r dr d\theta$ correspondant à une surface à $z = 0$ constant. On en déduit, par intégration de la coordonnée θ de 0 à 2π une surface simplement élémentaire $dS = \int_0^{2\pi} d^2S = 2\pi r dr$. On peut réaliser une telle intégration puisque la distribution est invariante par rotation autour de (Oz), et est donc indépendante de la coordonnée θ . Tous les points de la couronne portent la même densité surfacique de charges.

- (c) La distribution n'est pas uniforme, il n'y a pas de symétrie sphérique, mais il y a cependant un axe de révolution (Oz) puisque la densité de charges ne dépend pas de φ .

On découpe la sphère en couronnes d'axe (Oz), de rayon $R \sin \theta$ et de hauteur $R d\theta$. La surface élémentaire est donc $dS = 2\pi R \sin \theta \times R d\theta$, car le rayon du cercle est $R \sin \theta$. On a donc $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ ³

La charge élémentaire est donc ici $dq = 2\pi R^2 \sigma_0 \cos \theta \sin \theta d\theta$



3. Distributions volumiques : la charge élémentaire est donnée par $dq = \rho d\tau$.

- (a) La distribution présente une invariance par rotation autour de (Oz), donc ne dépend pas de la coordonnée θ . La densité volumique de charges ne dépend pas non plus de la coordonnée r . On découpe le cylindre en petites tranches (disques de rayon R et de hauteur dz) sur lesquelles la densité de charges est constante.

Le volume élémentaire est donc $d\tau = \pi R^2 dz$ ⁴,

et la charge élémentaire $dq = \pi R^2 \rho_0 \frac{a}{|z|} dz$

- (b) La distribution présente une invariance par translation d'axe (Oz), donc ne dépend pas de la coordonnée z . On découpe le cylindre en volumes élémentaires compris entre deux cylindres concentriques de même hauteur h , de rayons respectifs r et $r + dr$.

Le volume élémentaire est donc $d\tau = 2\pi r h dr$ avec $2\pi r h$ la surface du cylindre intérieur et dr l'épaisseur de la tranche⁵.

La charge élémentaire est donc $dq = 2\pi h \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr$

- (c) On a une symétrie sphérique, on découpe la sphère en coquilles comprises entre deux sphères concentriques de rayons respectifs r et $r + dr$. Le volume compris entre ces

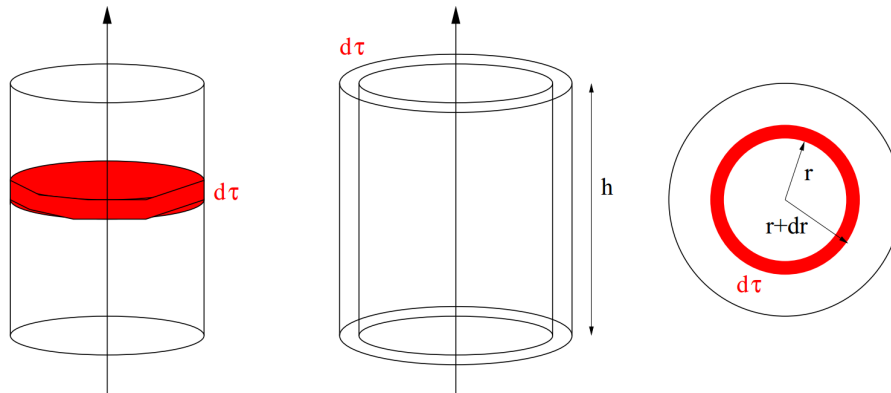
3. On peut aussi obtenir cette surface en prenant la surface doublement élémentaire en coordonnées sphériques $d^2S = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, et en la faisant "tourner" autour de (Oz), ce qui correspond à l'intégrer, pour φ variant de 0 à 2π . Tous les points de cette surface portent la même densité surfacique de charges puisque celle-ci est indépendante de φ .

4. On peut aussi obtenir ce volume en prenant le volume triplement élémentaire en coordonnées cylindriques $d^3\tau = r dr d\theta dz$, et en l'intégrant, pour θ variant de 0 à 2π , et pour r variant de 0 à R . Tous les points de ce volume portent la même densité de charges puisque celle-ci est indépendante de r et θ . On a $d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^R d^3\tau = dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr = 2\pi \times \frac{R^2}{2} dz = \pi R^2 dz$.

5. On peut aussi obtenir ce volume en prenant le volume triplement élémentaire en coordonnées cylindriques $d^3\tau = r dr d\theta dz$, et en l'intégrant, pour θ variant de 0 à 2π , et pour z variant de 0 à h . Tous les points de ce volume portent la même densité de charges puisque celle-ci est indépendante de θ et z . On a $d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^h d^3\tau = r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi h r dr$.

deux sphères est $d\tau = 4\pi r^2 dr$, où $4\pi r^2$ est la surface de la sphère intérieure, et dr l'épaisseur de la coquille⁶.

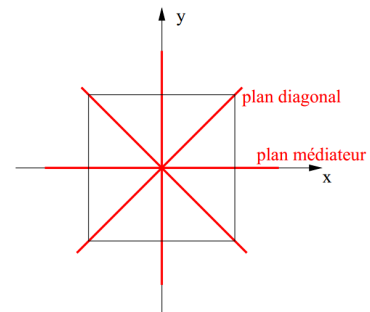
La charge élémentaire est par conséquent $dq = 4\pi\rho r^2 dr$



Exercice 2 - Cube chargé

Le plan (xOy) , parallèle aux deux faces chargées passant par O est plan d'antisymétrie de la distribution.

Les plans médiateurs, (xOz) et (yOz) , et les plans diagonaux des faces chargées sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Leur intersection avec le plan d'une face chargée est représentée sur la figure ci-contre.



Exercice 3 - Effet de pointe

1. On utilise le théorème de Gauss pour calculer le champ $\vec{E}$.

On travaille en coordonnées sphériques, d'après les invariances et symétries de cette distribution sphérique, on a (voir cours) $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$.

On choisit comme surface de Gauss la sphère passant par M (de rayon r). Le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface est $\Phi = E(r) \times 4\pi r^2$.

6. On peut aussi obtenir ce volume en prenant le volume triplement élémentaire en coordonnées sphériques $d^3\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$, et en l'intégrant, pour θ variant de 0 à π , et pour φ variant de 0 à 2π . Tous les points de ce volume portent la même densité de charges puisque celle-ci est indépendante de θ et φ . On a $d\tau = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d^3\tau = r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2 \times 2\pi \times r^2 dr = 4\pi r^2 dr$.

On peut aussi également considérer que c'est le volume de la grande boule de rayon $r + dr$, auquel on soustrait le volume de la petite boule de rayon r :

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \left[\left(1 + \frac{dr}{r}\right)^3 - 1 \right].$$

Un développement limité au premier ordre ($dr \ll r$) donne $\left(1 + \frac{dr}{r}\right)^3 = 1 + 3\frac{dr}{r}$ et par conséquent : $d\tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 3\frac{dr}{r} = 4\pi r^2 dr$.

Enfin, on peut aussi obtenir ce résultat en différenciant par rapport à r le volume de la sphère : $\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$ donc $d\tau = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 dr = 4\pi r^2 dr$.

Calculons la charge intérieure :

$$\text{si } r > R Q_{int} = \sigma \times 4\pi R^2$$

$$\text{si } r < R Q_{int} = 0$$

D'après le théorème de Gauss, $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E \times 4\pi r^2$

Par conséquent
$$\begin{cases} r < R & \vec{E} = \vec{0} \\ r > R & \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{cases}$$

2. D'après la relation locale champ-potential $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. Or le champ est purement radial, donc le potentiel ne peut dépendre que de r : $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$ et $E_r(r) = -\frac{dV}{dr}$.

À l'extérieur ($r > R$) on a

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + k_1$$

On choisit la référence de potentiel à l'infini, ce qui impose $k_1 = 0$.

À l'intérieur ($r < R$), on a $-\frac{dV}{dr} = 0$ soit $V = k_2$.

Par continuité du potentiel en $r = R$: $V(R^-) = V(R^+)$,

$$\text{soit } k_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}.$$

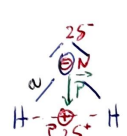
Finalement,
$$\begin{cases} V(r < R) & = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \\ V(r > R) & = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} \end{cases}$$

3. Au voisinage de R^+ , $V(R^+) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$ et $E(R^+) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Il vient
$$E(R^+) = \frac{V(R^+)}{R}.$$

Pour un même potentiel V imposé à la sphère, le champ E à son voisinage proche est d'autant plus intense que R est petit. C'est ce qu'on appelle le pouvoir des pointes, caractérisées par de très petits rayons de courbures.

Exercice 4 - Moment dipolaire molécule d'eau



$| \delta | = \frac{e}{3}$ donc $q^- = 2\delta^- = -\frac{2e}{3}$
 $q^+ = \frac{2e}{3}$

De plus $\|\vec{NP}\| = a \cos \frac{\theta}{2}$ donc $\|\vec{p}\| = qNP = \frac{2e}{3} a \cos \frac{\theta}{2}$

On trouve
$$\begin{cases} p = 0,63 \cdot 10^{-29} \text{ C.m} \\ p = 1,9 \text{ D} \end{cases}$$

Approfondissement

Exercice 5 - Energie de formation

$$1) \mathcal{E} = Q^\alpha R^\beta \epsilon_0^\gamma$$

• $\mathcal{E}$ étant une énergie, $[\mathcal{E}] = \pi L^2 T^{-2}$

• $I = \frac{dq}{dt}$ donc $[Q] = A \cdot T$

• $[R] = L$

• La loi de Coulomb donne $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$

donc $[\epsilon_0] = \frac{[Q]^2}{[F] L^2} = \frac{I^2 T^2}{\pi L T^{-2} L^2} = I^2 T^4 \pi^{-1} L^{-3}$

L'équation aux dimensions donne :

$$\begin{aligned} \pi L^2 T^{-2} &= (I \cdot T)^\alpha (L^\beta (I^2 T^4 \pi^{-1} L^{-3})^\gamma) \\ &= I^{\alpha+2\gamma} T^{\alpha+4\gamma} L^{\beta-3\gamma} \pi^{-\gamma} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 4\gamma = -2 \\ \beta - 3\gamma = 2 \\ -\gamma = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = k \frac{Q^2}{R \epsilon_0}}$$

2) La sphère déjà construite porte une charge

$$q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Pour augmenter de dr le rayon de la sphère, il faut amener de l'infini une charge $dq = \rho \times \frac{4\pi r^2 dr}{dv}$

le travail à fournir est $\delta W = -dE_p = +dq dV$

le potentiel est nul en l'infini et en r :

$$V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

Ainsi $\boxed{\delta W = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr}$

$\delta W > 0$ car l'opérateur doit fournir du travail pour vaincre l'interaction coulombienne.

$$3) \mathcal{E} = \int_0^R \delta W = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R} \quad \text{donc} \quad \boxed{k = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4\pi}}$$

4) La charge du noyau est Ze

le rayon de la sphère est donné par :

$\frac{4}{3}\pi R^3 = A \times \frac{4}{3}\pi R_0^3$ ou R_0 est le rayon d'un nucléon. donc $R = R_0 A^{1/3}$

On a donc $\mathcal{E} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{5R_0 A^{1/3}} = 1,2 \cdot 10^2 \text{ MeV}$

Cette énergie est positive ce qui implique que les charges étaient plus stables à l'infini que rassemblées dans le noyau.

Pour comprendre la stabilité du noyau, il faut rajouter l'interaction forte qui est stabilisatrice et compense largement $\mathcal{E}$.

Exercice 6 - Un fil et un cylindre

1. Analyse des symétries et invariances de la distribution :

On choisit de travailler en coordonnées cylindriques. Dans ce système de coordonnées, le champ électrostatique s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

La distribution est invariante par toute rotation autour de l'axe zz' , donc le champ est indépendant de la coordonnée θ .

La distribution est invariante par toute translation parallèle à l'axe zz' , donc le champ est indépendant de la coordonnée z .

Le plan contenant M et l'axe zz' est un plan de symétrie de la distribution donc le champ électrostatique au point M est contenu dans ce plan, et n'a pas de composante suivant $\vec{e}_\theta$.

Le plan contenant M et perpendiculaire à l'axe zz' est également un plan de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrostatique en M est donc contenu dans ce plan, et n'a pas de composante suivant $\vec{e}_z$.

Le champ est donc **radial** : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$

Choix de la surface de Gauss :

Puisque le champ est radial, on choisit un cylindre passant par M , donc de rayon r et de hauteur arbitraire h .

Le flux du champ $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$ à travers la paroi latérale du cylindre, de vecteur normal sortant $\vec{e}_r$, est

$$\Phi_{lat} = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint (E_r(r)\vec{e}_r) \cdot (dS\vec{e}_r) = 2\pi rhE(r)$$

À travers les deux disques perpendiculaires à l'axe zz' (vecteur normal : $\vec{e}_z$) qui referment le cylindre, le flux du champ est

$$\Phi_{disques} = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint (E_r(r)\vec{e}_r) \cdot (dS\vec{e}_z) = 0$$

Le flux total du champ électrostatique à travers la surface de Gauss est donc $\Phi_t = 2\pi rhE(r)$

Application du théorème de Gauss :

Exprimons la charge intérieure à la surface de Gauss. Il y a deux cas possibles :

1er cas : $r < R$

Dans ce cas, la charge intérieure est uniquement celle portée par la portion de fil contenue dans le cylindre de Gauss : $Q_{int} = \lambda h$.

D'après le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ 2\pi rhE(r) &= \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\end{aligned}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

2ème cas : $r > R$

Dans ce cas, le cylindre de Gauss contient une partie du cylindre chargé, et la charge intérieure est donc : $Q_{int} = \lambda h + \sigma \times 2\pi Rh$.

D'après le théorème de Gauss :

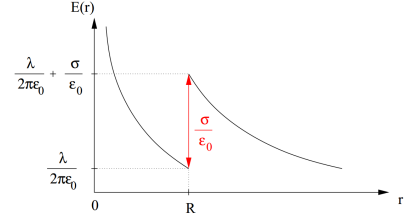
$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ 2\pi rhE(r) &= \frac{\lambda h + 2\pi Rh\sigma}{\epsilon_0} \\ E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\end{aligned}$$

$$\vec{E}(M) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \right) \vec{e}_r$$

2. On l'a vu, le champ est radial et sa norme ne dépend que de la coordonnée r .

On représente donc la fonction $\|\vec{E}\| = f(r)$ (figure ci-contre).

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r < R, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & \text{si } r > R. \end{cases}$$



On a donc deux portions d'hyperboles qui ne se raccordent pas en $r = R$.

3. On observe une discontinuité de la norme du champ électrostatique en $r = R$.

$$E(r = R^-) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

$$E(r = R^+) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E(r = R^+) - E(r = R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Exercice 7 - Condensateur plan

1. On travaille en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

La distribution étant invariante par toute translation selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, le champ ne dépend que de la coordonnée x . Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan (yOz) est plan de symétrie, le champ électrostatique en M est donc contenu dans l'intersection de tout ces plans, il est porté par l'axe Mx .

$$\vec{E}(M) = E_x(x)\vec{e}_x.$$

Le plan chargé est plan de symétrie de la distribution. Au point $M'(-x, y, z)$ symétrique de $M(x, y, z)$ par rapport à yOz , le champ $\vec{E}(M')$ est le symétrique du champ $\vec{E}(M)$. La fonction $E(x)$ est donc impaire : $E(-x) = -E(x)$.

On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède dont deux faces sont parallèles au plan yOz (le champ leur est donc normal), de surface S , l'une placée en $M(x)$ et l'autre en $M'(-x)$, et les quatre autres faces normales au plan (le champ leur est donc tangent)

Le flux à travers cette surface de Gauss est

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot dS\vec{n} = E(x) \times S + E(-x) \times (-S) = 2SE(x),$$

car le vecteur normal est $\vec{e}_x$ en M et $-\vec{e}_x$ en M' .

La charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{int} = \sigma S$

Le théorème de Gauss donne donc : $2SE(x) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ soit $E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A.N. : $\|\vec{E}\| = 4,0 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$

2. On obtient dans cette configuration

$$\vec{E}_A(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{E}_B(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x > e \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x < e \end{cases}$$

3. D'après le théorème de superposition, le champ créé par la distribution $A \cup B$ est égal à la somme vectorielle des champs créés par les deux distributions séparées : $\vec{E}_{A \cup B}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$.

$$\text{On obtient donc } \vec{E}(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } 0 < x < e \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x > e \end{cases}$$

$$\text{Soit } \vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > e \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } 0 < x < e \end{cases}.$$

Le champ est nul en dehors des armatures et uniforme entre les armatures : les lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques.

4. On a la relation locale entre champ et potentiel :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

Or $E_y = E_z = 0$ donc $E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ entre les armatures.

En intégrant cette relation entre A ($x = 0$) et B ($x = e$), on obtient : $V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$.

A.N. : $V_A - V_B = 40 \text{ V}$.

5. La charge portée par la région de surface S isolée par la pensée sur l'armature A est $Q = S \times \sigma$.

La différence de potentiel entre les deux armatures du condensateurs, $U = V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

est liée à la capacité du condensateur par la relation : $Q = C \times U = C \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \sigma S$.

On en déduit que $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$.

6. La charge portée par la surface S isolée sur l'armature B est $Q_B = -\sigma S$. Elle est soumise à un champ électrostatique $\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x$ dû à l'armature A . Cette portion d'armature subit donc une force électrostatique $\vec{F} = Q_B \vec{E}_A = -\sigma S \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x$.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

7. La pression électrostatique est la force électrostatique par unité de surface donc $P_{el} = \frac{\|\vec{F}\|}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

A.N. : $P_{el} = 2,9.10^2 \text{ N.m}^{-2}$

Exercice 8 - Anneau chargé

1. On travaille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

Le plan $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ $\vec{E}(P)$ lui appartient, il n'a donc pas de composante orthoradiale : $E_\theta(r, \theta, z) = 0$.

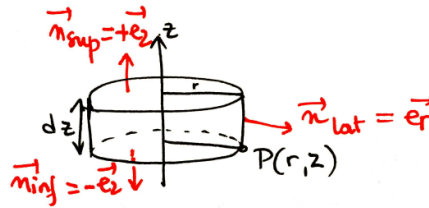
2. La distribution de charge est invariante par toute rotation autour de (Oz) donc la norme de $\vec{E}(P)$ est indépendante de θ :

$$\vec{E}(P) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$$

3. Une surface fermée située au voisinage de l'axe ne renferme aucune charge. D'après le **théorème de Gauss**, le flux de $\vec{E}$ à travers une telle surface est donc **nul**.

La circulation de tout champ $\vec{E}$ est nulle sur un contour fermé.

4. On découpe la surface fermée en un disque inférieur, un disque supérieur et une surface latérale



Le flux est donc donné par

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d^2\vec{S}_{\text{lat}} + \iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d^2\vec{S}_{\text{inf}} + \iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d^2\vec{S}_{\text{sup}}$$

$$\Phi = E_r(r, z) \times 2\pi r dz - E_z(r, z) \times \pi r^2 + E_z(r, z + dz) \times \pi r^2$$

Or, d'après le théorème de Gauss, ce flux est nul puisque la surface ne contient aucune charge intérieure.

Si on suppose en outre que sur l'ensemble du disque (inférieur ou supérieur), la composante axiale du champ varie peu (ce qui est justifié dans le cas où r/L^* est d'ordre 1, alors

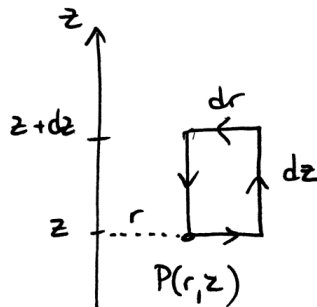
$$E_z(r, z + dz) \simeq E_z(0, z + dz) = E_0(z + dz)$$

$$E_z(r, z) \simeq E_z(0, z) = E_0(z)$$

$$\text{Il vient par conséquent } E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \times \frac{E_0(z + dz) - E_0(z)}{dz}.$$

Comme $\frac{dz}{L^*}$ est aussi d'ordre 1, on reconnaît la dérivée première du champ axial : $E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_0(z)}{dz}$.

5. Puisque les grandeurs $\frac{r}{L^*}$ et $\frac{dz}{L^*}$ sont désormais d'ordre 2, il est raisonnable de supposer que les différentes composantes du champ sont à peu près uniformes sur les différentes portions du contour.



$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{OP} = 0 \\
 0 &= \vec{E}(r, z) \cdot (dr \vec{e}_r) + \vec{E}(r + dr, z) \cdot (dz \vec{e}_z) \\
 &\quad + \vec{E}(r, z + dz) \cdot (-dr \vec{e}_r) + \vec{E}(r, z) \cdot (-dz \vec{e}_z) \\
 0 &= E_r(r, z)dr + E_z(r + dr, z)dz - E_r(r, z + dz)dr - E_z(r, z)dz
 \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{E_r(r, z + dz) - E_r(r, z)}{dz} = \frac{E_z(r + dr) - E_z(r, z)}{dr}.$$

Avec les dérivées partielles :

$$\boxed{\frac{\partial E_r(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial E_z(r, z)}{\partial r}}$$

Comme d'autre part, $E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_0(z)}{dz}$,

on a $\frac{\partial E_z(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{r}{2} \frac{dE_0(z)}{dz} \right) = -\frac{r}{2} \frac{d^2 E_0(z)}{dz^2}$.

En intégrant entre 0 et r (à z constant), on a donc

$$\boxed{E_z(r, z) = E_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 E_0(z)}{dz^2}}$$

6. Pour récapituler, on a, à l'ordre 0, 1 puis 2 en r :

$$\boxed{\text{ordre 0 : } \vec{E}(P) = E_0(z) \vec{e}_z}$$

$$\boxed{\text{ordre 1 : } \vec{E}(P) = -\frac{r}{2} E'_0(z) \vec{e}_r + E_0(z) \vec{e}_z}$$

$$\boxed{\text{ordre 2 : } \vec{E}(P) = -\frac{r}{2} E'_0(z) \vec{e}_r + \left[E_0(z) - \frac{r^2}{4} E''_0(z) \right] \vec{e}_z}$$

A l'ordre 0, le champ en P est essentiellement selon $\vec{e}_z$, comme en un point de l'axe. La première correction (ordre 1) correspond à une composante radiale, et fait intervenir la dérivée première du champ en un point de l'axe. La correction suivante (ordre 2) modifie légèrement la composante principale du champ, selon $\vec{e}_z$.