TD 17

Magnétostatique

Questions de cours

— Donner l'expression du courant en fonction de q puis en fonction de $\overrightarrow{j}$
— Donner l'expression de $\overrightarrow{j}$
— Donner un exemple d'une distribution de courant symétrique, antisymétrique
— Comment est $\overrightarrow{B}$ en un point d'un plan de symétrie, d'antisymétrie ?
— Donner la forme des lignes de champ dans le cas d'une spire, d'un fil infini et d'un solénoïde
— Définir la circulation de $\overrightarrow{B}$
— Citer le théorème d'Ampère
— Définir le flux de $\overrightarrow{B}$, quelle est sa propriété ?
— Qu'est ce qu'un dipole électrique ? un dipole magnétique ?
— Qu'est ce que l'approximation dipolaire
— Citer la force de Laplace élémentaire
— Quelles sont les actions d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétostatique ?
— Donner l'expression de de l'énergie potentielle associée

Applications directes du cours

Exercice 1 - Cartes de champ magnétostatique - ♥♥♥/ ★

Tracer l'allure, dans le plan (xOy) des lignes du champ magnétostatique créé par les distributions suivantes :

1. Deux fils infinis parallèles d'axe (Oz), distants de d, parcourus par des courants de même intensité I et de même sens.
2. Deux fils infinis parallèles d'axe (Oz), distants de d, parcourus par des courants de même intensité I mais de sens opposés.
3. Trois fils infinis parallèles d'axe (Oz), placés au sommet d'un triangle équilatéral, parcourus par des courants de même sens et intensité.

Exercice 2 - Conducteur torique- ♥♥♥/ ★

On considère un tore à section carrée, obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Oz) un carré de côté a et de centre O_1, situé à la distance R de l'origine O. Sur ce tore est bobiné un fil conducteur, formant N spires identiques jointives, parcourues par un courant I.

1. Calculer le champ magnétostatique créé par cette distribution en tout point de l'espace.
2. Représenter la norme de ce champ.
3. Calculer le flux de $\vec{B}$ à travers le tore.

Exercice 3 - Moment cinétique orbital et moment magnétique - ♥♥/ ★★

Un modèle classique simple d'atome d'hydrogène consiste à considérer l'électron (masse m_e, charge $-e$) décrivant un mouvement circulaire uniforme autour du noyau, supposé fixe. On note ω la vitesse angulaire de l'électron sur cette orbite et on propose de modéliser ce système comme une spire parcourue par un courant d'intensité I constante.

On rappelle la masse de l'électron $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg.

1. Rappeler la signification de l'intensité d'un courant électrique, quelle définition peut-on adopter pour l'intensité moyenne I ? Préciser son orientation.
2. En déduire une expression du moment magnétique du système en fonction de e, du rayon a et de ω. Préciser son sens.
3. Quel est par ailleurs le moment cinétique orbital, exprimé au centre du système (noyau fixe en O) ?
4. Vérifier qu'il y a proportionnalité du moment magnétique et du moment cinétique, que dire de leurs sens ?
5. Que remarque-t-on sur le coefficient de proportionnalité (cette propriété est très générale : toute particule présente un moment cinétique propre et un moment magnétique qui sont proportionnels) ? Quel ordre de grandeur proposer pour le moment dipolaire de l'atome d'hydrogène, sachant que le moment cinétique orbital est de l'ordre de $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}$ Js^{-1} ?

Approfondissement

Exercice 4 - Boule de Rowland - ♥/ ★★

Une boule de polystyrène (matériau non conducteur), de centre O et de rayon R, a été chargée uniformément en volume, et porte la densité volumique ρ. Elle est mise en rotation autour d'un de ses diamètres, avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ constante.

1. Étudier les symétries de cette distribution de courant.
2. Calculer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ associé à cette distribution.
3. Calculer l'intensité de cette distribution relative à un demi-disque dont le diamètre s'appuie sur (Oz).

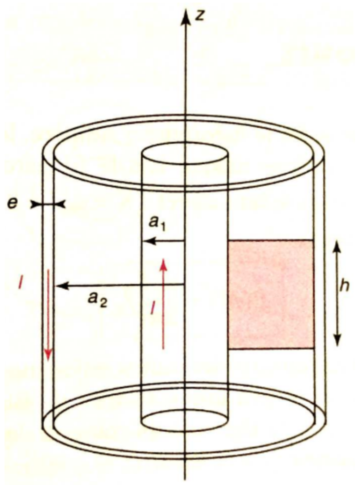
Exercice 5 - Cable coaxial - ♥♥/★

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même axe (Oz) :

— l'âme $\mathcal{C}_1$ est un cylindre conducteur de rayon a_1 ;

— l'armature externe, ou gaine, est un cylindre de rayon intérieur a_2 et d'épaisseur $e \ll a_2$.

— le volume entre l'âme et la gaine est rempli par un matériau isolant.



Ce câble est utilisé dans un circuit électrique : l'âme est alors parcourue par un courant I réparti uniformément dans son volume, tandis que la gaine est parcourue par un courant $-I$ réparti sur sa surface (l'épaisseur est négligée).

1. Donner le vecteur densité volumique de courant dans l'âme.
2. Calculer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de courant. Représenter la norme de $\vec{B}$.
3. On considère la surface verticale de hauteur h, découpée dans l'isolant ($a_1 < r < a_2$), représentée sur la figure précédente. Calculer le flux Φ de $\vec{B}$ à travers cette surface.
4. On appelle coefficient d'auto-induction la quantité $L = \dfrac{\Phi}{I}$. Exprimer L ainsi que le coefficient d'auto-induction par unité de longueur Λ.
5. On peut montrer que la capacité par unité de longueur Γ de ce câble coaxial est donné par $\Gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{a_2}{a_1}}$. En déduire une propriété des caractéristiques Γ et Λ d'un tel câble.

Exercice 6 - Précession de particules dans un champ magnétique - ♥♥/ ★★★

L'exercice précédent a permis d'entrevoir le lien de proportionnalité existant entre le moment cinétique propre $\vec{\sigma}_0$ d'une particule et son moment magnétique propre : $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}_0$. On désire décrire une propriété singulière d'une telle particule, lorsqu'elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ (les applications de ce phénomène sont multiples : imagerie médicale par RMN, définition de référence de temps ...).

1. Quelle équation de la mécanique est adaptée à cette étude ? En déduire une équation différentielle vectorielle régissant l'évolution de $\vec{m}$.
2. À l'instant initial, le moment dipolaire magnétique fait un angle α connu avec le champ magnétique extérieur. Décrire le mouvement observé.
3. Que peut-on dire de l'énergie potentielle d'interaction entre le moment dipolaire et le champ magnétique au cours de ce mouvement ?
4. Quel système mécanique macroscopique décrit un mouvement identique dans le champ de pesanteur uniforme ?
5. Comment peut-on lever ce paradoxe : la boussole s'aligne sur le champ magnétique, alors que la particule maintient un angle constant ?

Élements de réponse

1. Dans le cas de deux fils infinis parallèles, les champs magnétiques sont de sens opposés entre les deux fils, ce qui conduit à l'apparition d'un point de champ nul, à la distance $\frac{d}{2}$ des deux fils.
2. $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$ pour $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$.

   $\Phi = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$.
3. $V(M) = \frac{-\delta a^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$

   $\vec{E}(M) = -\frac{3\delta a^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[\left(3\cos^2\theta - 1\right)\vec{e}_r + 2\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta\right]$.
4. $I = \frac{e\omega}{2\pi}$, circulant en sens contraire des électrons.

   $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{\sigma}$.

   Le moment magnétique est de l'ordre de $\frac{e\hbar}{2m} \simeq 9.10^{-24}$ Am^2

1. $\vec{j} = \rho\vec{v}(P) = \rho\omega r\sin\theta\vec{e}_\varphi$ et $I = \frac{2\rho\omega R^3}{3}$.
2. $\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a_1^2} r\vec{e}_\theta & \text{si } r < a_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \vec{0} & \text{si } r > a_2 \end{cases}$

   $\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$

   $\Gamma\Lambda = \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, constant.
3. D'après le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma\vec{m}\wedge\vec{B}$

   On décompose $\vec{m} = \vec{m}_\parallel + \vec{m}_\perp$. En projection sur l'axe de $\vec{B}$, on en déduit que $\vec{m}_\parallel$ est constant. D'autre part, $\vec{m}_\perp$ tourne à vitesse constante autour de l'axe de $\vec{B}$. Finalement $\vec{m}$ décrit un cône d'axe $\vec{B}$ et de demi-angle au sommet α (comme une toupie).