

TD17

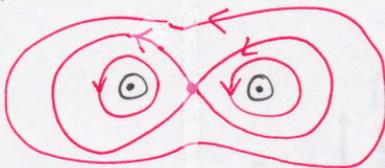
Magnétostatique

Correction

Applications directes du cours

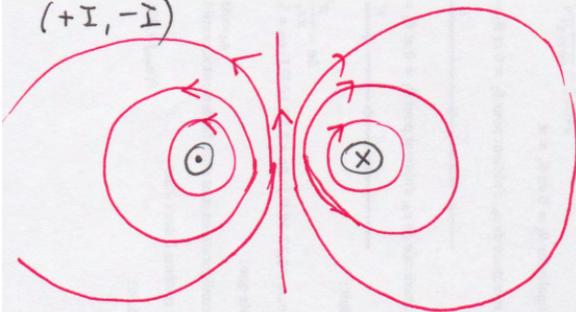
Exercice 1 - Cartes de champ magnétostatique

$(+I, +I)$



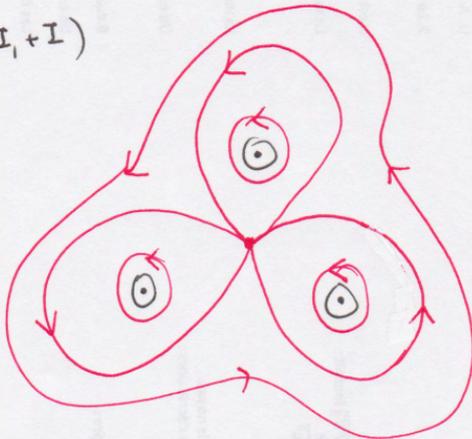
- point de champ nul en $d/2$
- proche du fil, on retrouve quasiment des cercles (comme pour un fil unique)

$(+I, -I)$



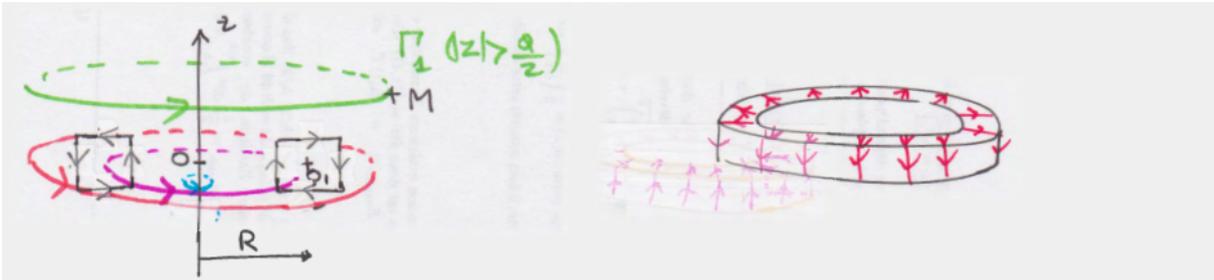
le plan médiateur est plan d'antisymétrie, \vec{B} lui appartient

$(+I, +I, +I)$



- proche d'un fil, les lignes de champ \vec{B} sont quasiment circulaires
- point de champ nul au centre du triangle. (0)
- invariance par rotation d'axe (Oz) et d'angle $k \frac{2\pi}{3}$

Exercice 2 - Conducteur torique



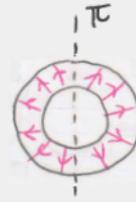
1) On travaille en coordonnées cylindriques

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

Symétries $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) = \pi$ donc $B_r = 0$ $B_z = 0$

Invariance par toute rotation autour de (Oz)

Il reste $\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta}$



On choisit comme contour d'Ampère le cercle d'axe (Oz) passant par M (r et z constant)

$$\mathcal{C} \equiv \oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = B_\theta(r, z) \cdot 2\pi r$$

Selon la position de M , l'intensité enlacée varie

si $|z| > a/2$ le contour n'enlace aucune intensité
 $I_{\text{enlacée}} = 0$

Pour $|z| < a/2$, il faut distinguer 3 cas :

- $r < R - a/2$ $I_{\text{enlacée}} = 0$
- $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$ $I_{\text{enlacée}} = +IN$ on n'enlace que les intensités montantes au centre du tore
- $r > R + \frac{a}{2}$ $I_{\text{enlacée}} = -IN + I \times N = 0$
 on enlace les intensités montantes au centre du tore et les descendantes à l'extérieur.

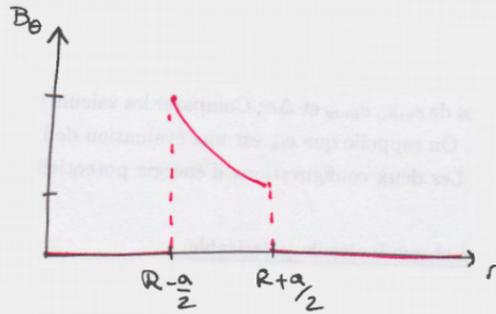
Le champ n'est non nul que pour $|z| < \frac{a}{2}$ et $R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2}$ soit à l'intérieur du tore.

D'après le théorème d'Ampère $\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$

d'où $\boxed{\vec{B}(M_{\text{int}}) = \frac{+\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$

(si on choisit l'autre orientation pour le courant dans les spires, on obtient un signe -)

2) Pour $|z| < \frac{a}{2}$ on a $B_{\theta}(r)$:



B n'est non nul qu'à l'intérieur du tore (canalisation du flux magnétique)
 B discontinu en $R - \frac{a}{2}$ et $R + \frac{a}{2}$ (courant en surface du tore)

3) le flux de \vec{B} à travers le tore est celui à travers la section carrée du tore (flux conservatif)

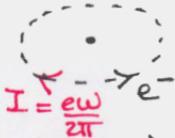
$$\begin{aligned}\Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B_{\theta} \vec{e}_{\theta} \cdot (dr dz) \vec{e}_{\theta} \\ \Phi &= \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} B_{\theta}(r) dr \int_{-a/2}^{a/2} dz = a \cdot \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr \\ \Phi &= \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \left[\ln r \right]_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}}\end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln \frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}$$

Exercice 3 - Moment cinétique orbital et moment magnétique

- 1) L'intensité électrique est un débit de charge $I = \frac{dq}{dt}$
 L'électron a une vitesse angulaire ω (donc une période de rotation $T = \frac{2\pi}{\omega}$) et une charge $-e$.
 L'intensité associée à ce mouvement de rotation est donc

$$I_e = - \frac{e\omega}{2\pi}$$
 (dans le sens des électrons)
 ou encore $I = \frac{e\omega}{2\pi}$ dans le sens opposé aux électrons



- 2) $\vec{M} = I\vec{S}$; on a donc $M = \frac{e\omega}{2\pi} \cdot \pi a^2$

$$M = \frac{e\omega a^2}{2}$$
 orienté par la règle de la main droite



$$\vec{M} = - \frac{e\omega a^2}{2} \vec{e}_z$$

- 3) $\vec{L} = \vec{on} \wedge m_e \vec{v}$ avec $\vec{on} = a\vec{e}_r$ et $\vec{v} = a\omega \vec{e}_\theta$

$$\vec{L} = m_e a^2 \omega \vec{e}_z$$
 (moment cinétique orbital)

- 4) $L = m_e a^2 \omega$

$$M = \frac{e\omega a^2}{2} = \frac{e}{2m_e} L$$
 Les sens sont opposés:

$$\vec{M} = - \frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

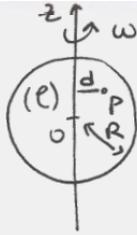
Le coefficient de proportionnalité ne dépend pas de la vitesse de l'électron, mais uniquement de sa charge et de sa masse.

- 5) Pour H $\|\vec{L}\| \approx \hbar$ on a donc $\|\vec{M}\| \approx \frac{e\hbar}{2m_e}$

AN: $\|\vec{M}\| = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31}} = 9 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$

Approfondissement

Exercice 4 - Boule de Rowland - ♥/★★



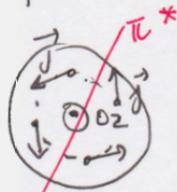
(1/2) Chaque point P de la boule est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω ; on a donc $\vec{v}(P) = d \cdot \omega \vec{e}_\varphi$

le point P porte une densité volumique de charge ρ . Puisqu'il est en mouvement, il existe localement un vecteur densité volumique de charge

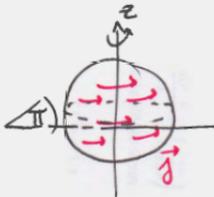
$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \omega r \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad \text{car } d = r \sin \theta$$

La distribution de courant est invariante par toute rotation autour de (Oz) (\vec{j} indépendant de φ)

Tout plan contenant (Oz) est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant (un de "haut")



Le plan (xOy) est en revanche un plan de symétrie pour la distribution de courant.



3. On calcule l'intensité par le flux du vecteur \vec{j} à travers une surface interceptant le courant:



On a $d\vec{S} = dS \vec{e}_\varphi = dr \cdot r d\theta \vec{e}_\varphi$



Il vient $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$$I = \iint \rho \omega \cdot r dr \sin \theta d\theta = \rho \omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr$$

$$I = \frac{2}{3} \rho \omega R^3$$

Exercice 5 - Cable coaxial

1) Dans l'âme, le courant se répartit uniformément en volume avec un vecteur densité $\vec{j} = j \vec{e}_z$

L'intensité totale est donc $I = \iint_{\text{âme}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot \pi a_1^2$

section de l'âme

On a donc $\vec{j} = \frac{I}{\pi a_1^2} \vec{e}_z$

2) On applique le théorème d'Ampère

Coordonnées cylindriques $\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Invariance par la rotation et la translation d'axe (Oz)

$(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) = \pi$ donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : cercle d'axe Oz de rayon r

$\mathcal{C} \triangleq \oint \vec{B} \cdot d\vec{\omega} = B_\theta(r) \cdot 2\pi r$

Intensité enlacée :

si $r < a_1$ $I_{\text{enlacée}} = j \cdot \pi r^2 = I \cdot \frac{r^2}{a_1^2}$

si $a_1 < r < a_2$ $I_{\text{enlacée}} = j \pi a_1^2 = I$

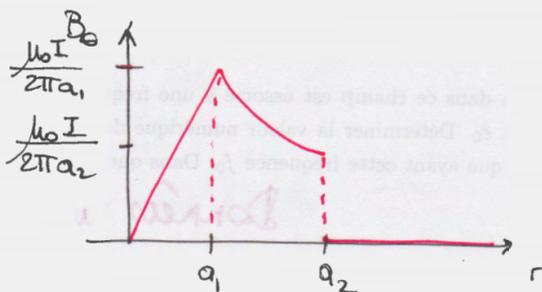
si $a_2 < r$ $I_{\text{enlacée}} = I - I = 0$

D'après le théorème d'Ampère $\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$

si $r < a_1$ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a_1^2} r \vec{e}_\theta$

si $a_1 < r < a_2$ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

si $a_2 < r$ $\vec{B}(M) = \vec{0}$



REM: B est discontinu en a_2
(distribution surfacique)

3) $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ avec ici $d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\theta$

$$\phi = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^h dz \int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

4) $L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$

et $\Lambda = \frac{L}{h}$

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

(auto-inductance par unité de longueur du câble)

5) $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$

on constate que

$$\Gamma \Lambda = \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Exercice 6 - Précession de particules dans un champ magnétique

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma}_0$$

\vec{m} : moment magnétique

$\vec{\sigma}_0$: moment cinétique propre

1) on utilisera le théorème du moment cinétique ($\vec{\sigma}_0$ est un paramètre permanent)

$$\text{on a } \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F})$$

avec \vec{F} la force ressentie par la particule et \vec{M}_0 le moment résultant, en O.

On néglige ici le poids (comme dans toutes les études mécaniques de mouvement de particules soumises à des champs \vec{E} ou \vec{B})

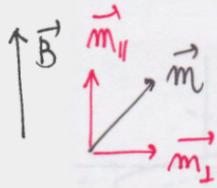
\vec{F} est la force de \vec{B}_{ext} sur un dipôle magnétique.

la résultante est nulle mais pas le couple résultant $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

finalement $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_0 \wedge \vec{B}$ avec $\vec{\sigma}_0 = \frac{\vec{m}}{\gamma}$

soit $\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B}$

- 2) \vec{B} définit une direction particulière pour le mouvement
 On décompose $\vec{m} = \vec{m}_{\parallel} + \vec{m}_{\perp}$



En projetant le TMC sur la direction de \vec{B} ,
 il vient $\frac{d\vec{m}_{\parallel}}{dt} = \vec{0}$ car $(\vec{m} \wedge \vec{B}) \perp \vec{B}$

Par conséquent $\vec{m}_{\parallel} = cte$

la projection de \vec{m} sur \vec{B} reste identique au cours du mouvement.

En projetant le TMC perpendiculairement à \vec{B} , il reste

$$\frac{d\vec{m}_{\perp}}{dt} = \gamma \vec{m}_{\perp} \wedge \vec{B}$$

Cette équation définit un mouvement de rotation uniforme perpendiculairement à \vec{B} , à la pulsation $\omega = \gamma B$

Le vecteur \vec{m} fait donc un angle constant α avec \vec{B} ,
 il décrit un cône de $\frac{1}{2}$ angle au sommet α .

- 3) $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_{\parallel} B$ car $\vec{m}_{\perp} \cdot \vec{B} = 0$

On a établi que $m_{\parallel} = cte$

Finalement $E_p = cte$: l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle magnétique et le champ reste constante au cours du mouvement.

- 4) Une toupie inclinée ou un gyroscope décrivent ce genre de mouvement à l'échelle macroscopique
- 5) À la différence de la particule, la boussole (ou plutôt l'aiguille aimantée) ne possède pas de moment cinétique propre (ou alors il est très faible)
 Au niveau microscopique des moments magnétiques donnent lieu à des moments cinétiques, mais ils sont peu importants à l'échelle macroscopique.