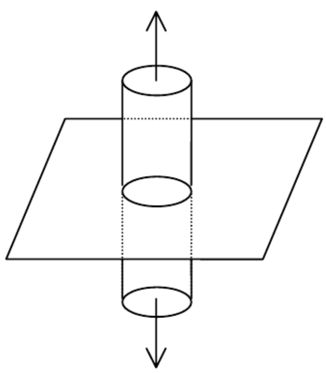
DM 6
Induction, électrostatique et magnétostatique

Correction

1 Micropompe électrostatique

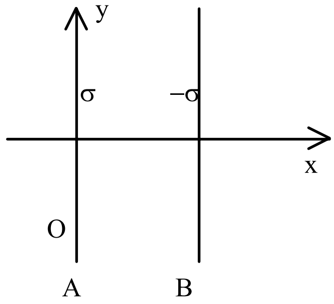
I.2.2. Tout plan perpendiculaire à la plaque est plan de symétrie. Donc $\vec{E}$ contenu dans tous ces plans est normal à la plaque.



On applique le théorème de Gauss en utilisant comme surface fermée un cylindre de génératrices perpendiculaires à la plaque et de bases S symétriques par rapport à la plaque.

Donc : $E.2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}}$

I.2.3. A.N. Avec $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2}, $\boxed{\left\|\vec{E}\right\| = 4{,}0.10^{6}\ \mathrm{V.m^{-1}}}$



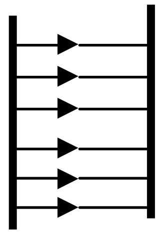
I.3. Etude de deux plaques infinies uniformément chargées.

I.3.1. Expression des champs en tout point de l'espace :

$$\boxed{\begin{array}{l} x<0\ :\ \overrightarrow{E_A} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{i} \\ x>0\ :\ \overrightarrow{E_A} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{i} \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{l} x<e\ :\ \overrightarrow{E_B} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{i} \\ x>e\ :\ \overrightarrow{E_B} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\vec{i} \end{array}}$$

I.3.2. En superposant les deux champs, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Entre les armatures :} & \vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{i} \\ \text{A l'extérieur des armatures :} & \vec{E} = 0 \end{array}}$$



<u>Les lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques</u>.

I.3.3. La différence de potentiel $V_A - V_B$ se calcule à partir de : $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$.

Soit : dV = -E.dx $\Rightarrow$ $V_A - V_B = E.e$ ou $\boxed{V_A - V_B = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}.e}$

I.3.4. A.N. Avec $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2} et e = 5 µm, on obtient : $\boxed{V_A - V_B = 40{,}2\ \mathrm{V}}$

I.3.5. La capacité C du condensateur formé par les deux surfaces S en regard est telle que C = σS = CV.
Soit : $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$.

I.3.6. La force électrostatique $\vec{F}$ qui s'exerce sur la surface S d'une plaque en fonction est telle que :
$\vec{F}_B = q_B.\vec{E}_A$ soit $F = -\sigma S\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_B = -\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.S\vec{i} = -\vec{F}_A}$

I.3.7. La pression électrostatique P_{el} définie comme le module de la force par unité de surface $P_{el} = \dfrac{F}{S}$ vaut donc : $\boxed{P_{eel} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

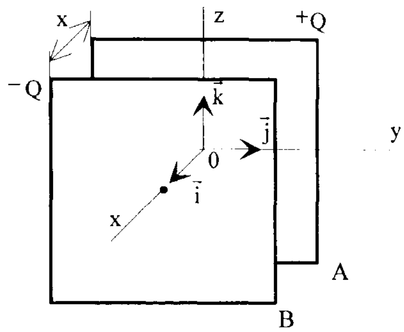


Figure 2

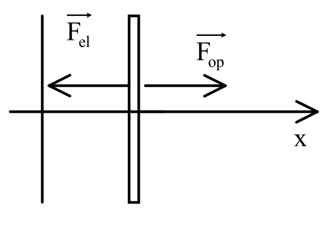
I.3.8. A.N. Pour $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2} $\boxed{P_{el} = 286\ \mathrm{N.m^{-2}}}$

<u>Deuxième partie : étude d'un condensateur</u>

II.1. Etude à charge *Q* constante

II.1.1. L'énergie électrostatique $\mathcal{E}$ est égale au travail fourni par l'opérateur pour apporter les charges de l'infini jusque sur les armatures.
Soit un état intermédiaire où les charges sont yQ et le potentiel yV (y < 1).
Apportons depuis l'infini la charge Q.dy. Cette charge passed u potentiel nul de l'infini au potentiel yV. Le travail fourni est donc : dW = yV.Qdy et par conséquent : d$\mathcal{E}$ = yV.Qdy $\Rightarrow$ $\mathcal{E} = \int_0^1 QV.y.dy = QV\left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}QV$

Avec Q = VC, on obtient : $\boxed{\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}}$ soit $\boxed{\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2.x}{\varepsilon_0 S}}$

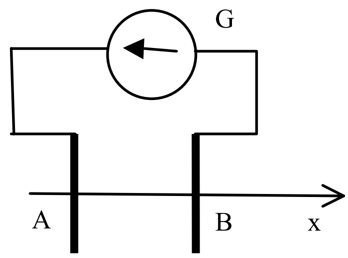


II. 1.2. Le travail δW_{op} fourni par l'opérateur sert à augmenter l'énergie du condensateur; donc : $\boxed{d\mathcal{E} = \delta W_{op}}$
Avec $\delta W_{el} = \delta W_{el}$, il vient : $\boxed{d\mathcal{E} = -\delta W_{el}}$

II.1.3. Pour un déplacement dx, on explicite δW_{op} : $\delta W_{op} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.dx = F_{op}.dx$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_{op} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.\vec{i}}$

II.1.4. On en déduit l'expression du vecteur $\boxed{\vec{F}_{el} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.\vec{i}}$

II.2. Etude à tension constante.



II.2.1. Lorsque la charge du condensateur varie de δQ, le générateur fournit l'énergie : $\boxed{\delta W_G = U.\delta Q}$

Avec $\mathcal{E} = \frac{1}{2}QU$, il vient : $\boxed{d\mathcal{E} = \frac{1}{2}U.\delta Q}$

On a donc : $\boxed{\delta W_G = 2.d\mathcal{E}}$ avec $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S.U^2}{x}}$

II.2.2. L'augmentation d'énergie du condensateur est égal à la somme des énergies fournies par le générateur et l'opérateur. Soit : $\boxed{\delta W_G + \delta W_{op} = d\mathcal{E}}$

II.2.3. En remplaçant δW_G par l'expression de II.2.1 il vient : $\delta W_{op} = -d\mathcal{E}$

Soit : $F_{op}.dx = -F_{el}.dx = -d\mathcal{E}$ ou $\boxed{\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el} = -\frac{d\mathcal{E}}{dx}.\vec{i}}$

En dérivant la relation $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S.U^2}{x}$, on obtient : $\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}U^2 = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{Cx}$. Donc $\boxed{\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}U^2.\vec{i}}$

Cette relation s'écrit aussi : $\boxed{\vec{F}_{op} == \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.\vec{i}}$ On retrouve le même résultat qu'à la question II.1.

II.2.4. A.N. Pour U = 40V, x = 5 µm et S = 12,56 mm^2 il vient : $\boxed{\left\|\vec{F}_{el}\right\| = 3{,}55\,mN}$

II.3. Etude de l'équilibre des plaques d'un condensateur et d'un ressort.

II.3.1.1. Force d'élasticité exercée par un ressort :

$\boxed{\vec{F}_R = k(e-x).\vec{i}}$

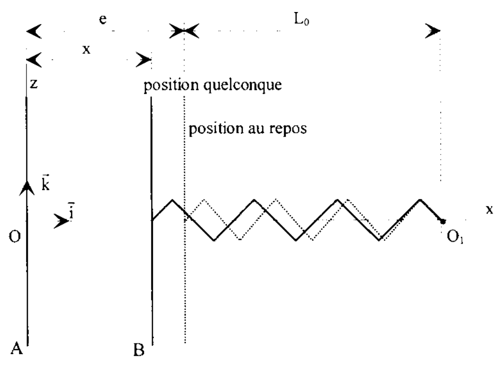


Figure 3

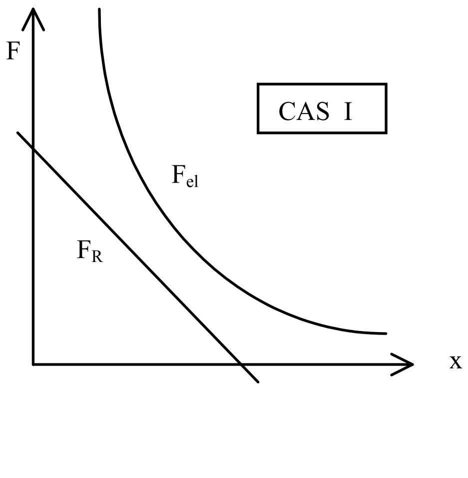
II.3.1.2. La position x = 0 est une position d'équilibre stable car la force électrostatique devient très grande mais l'armature fixe empêche l'armature mobile de se déplacer. Il apparaît une force de réaction de l'armature fixe sur l'armature mobile.

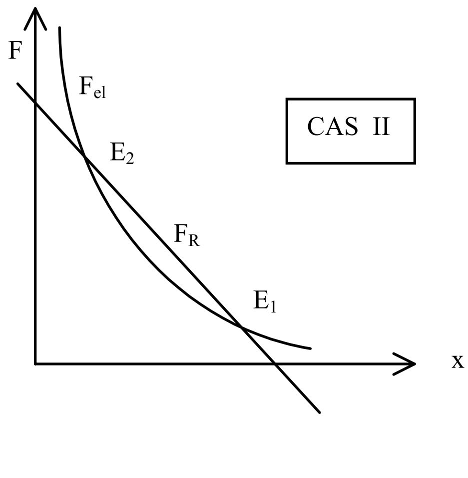
La cale collée sur l'armature fixe est équivalente à un diélectrique et empêche les deux armatures de venir en contact.

II.3.1.3. Les deux forces à considérer sont :

$F_R = k(e-x)$ et $F_{el} = \frac{CU^2}{2}\frac{1}{x}$

Deux cas peuvent se rencontrer selon que les deux courbes se coupent ou non.





- Cas I : les deux courbes ne se coupent pas; les deux forces ne sont jamais égales.
  La seule position d'équilibre est $x = 0$.
- Cas II : les deux courbes se coupent en deux points E_1 et E_2; en ces points les deux forces sont égales en norme et opposées; on a donc deux positions d'équilibre.
  En E1, si on écarte légérement l'armature mobile de sa position d'équilibre en augmentant x, on constate que $F_{el} > F_R$; donc le résultante des forces a tendance à ramener le système vers l'équilibre.
  Donc : $\boxed{E_1 = \text{Equilibre stable}}$
  En E_2, les propriétés sont inversées. Donc : $\boxed{E_2 = \text{Equilibre instable}}$

On peut retrouver ces résultats par un calcul classique en déterminant le signe de la dérivée seconde de l'énergie.

II.3.1.4. Le cas limite est celui où les deux courbes sont tangentes.
L'équation $F_{el}(x) = F_R(x)$ qui a en général 3 racines dont une racine négative, possède alors deux racines positives confondues et les deux courbes admettent la même tangente au point de contact. On a donc :

$k(e-x)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{x^2}$ (1) et en dérivant : $-k=-\frac{\varepsilon_0 SU^2}{x^3}$ (2)

La combinaison des relations (1) et (2) donne : $\frac{\varepsilon_0 SU^2}{x^3}(e-x)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{x^2} \Rightarrow 2(e-x)=x \Rightarrow \boxed{x_\ell=\frac{2e}{3}}$

D'où : $k\left(e-\frac{2e}{3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU_{c1}^2}{\left(\frac{2e}{3}\right)^2} \Rightarrow \boxed{U_{c1}=\sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}}}$

II. 3.1.5. A.N. Pour $k = 1{,}18610^4\ \text{Nm}^{-1}$ et $e = 5\ \mu\text{m}$ on obtient : $\boxed{U_{c1}=62{,}9\,\text{V}}$

II.3.2. Prise en compte de la cale isolante.

II.3.2.1. Le système est équivalent à deux condensateur en série; donc : $\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_{air}}+\frac{1}{C_{dié}}$

Soit : $\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left[(e-e_1)+\frac{e_1}{\varepsilon_r}\right]=\frac{e_{equi}}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{e_{equi}=e-e_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$.

II.3.2.2. Posons $x_0=e_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$ et $K=-\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2}$.

Les relations (1) et (2) de la question II.3.1.4. s'écrivent alors :
$k(e-x)=\frac{K}{(x-x_0)^2}$ (1') et $-k=-\frac{2K}{(x-x_0)^3}$ (2') $\Rightarrow (x-x_0)=2(e-x) \Rightarrow x_\ell=\frac{2e+x_0}{3}$ ou $\boxed{x_\ell=0{,}697.e}$

(1') $\Rightarrow k\left(e-\frac{2e+x_0}{3}\right)=\frac{K}{\left(x-\frac{2e+x_0}{3}\right)^2} \Rightarrow k\left(\frac{e}{3}-\frac{x_0}{3}\right)=\frac{K}{\left(\frac{2e}{3}-\frac{2x_0}{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{k}{3}(e-x_0)=\frac{K}{\frac{4}{9}(e-x_0)^2}$

D'où : $\frac{4k}{27}(e-x_0)^3=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2} \Rightarrow \boxed{U_{c2}=\sqrt{\frac{8ke_{equi}^3}{27\varepsilon_0 S}}}$

II.3.2.3. A.N. Pour $\varepsilon_r = 12$ et $e_1 = 0{,}5\ \mu\text{m}$, $\boxed{U_{c2}=54{,}4\,\text{V}}$

II.3.2.4. Lorsque les deux armatures sont collées, elles restent collées tant que U reste supérieure à une tension critique U_{c3} pour laquelle $F_{el} = F_R$ avec $x = e_1$.

Soit : $k(e-e_1)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{\left(\frac{e_1}{\varepsilon_r}\right)^2} \Rightarrow \boxed{U_{c3}=\sqrt{\frac{2k(e-e_1)e_1^2}{\varepsilon_0 S\varepsilon_r^2}}}$

II.3.2.5. A.N. Pour $\varepsilon_r = 12$ et $e_1 = 0{,}5\ \mu\text{m}$ $\boxed{U_{c3}=1{,}3\,\text{V}}$

X-ENS 2012

1) $m_p \gg m_e$ donc en première approximation le proton est fixe (Born Oppenheimer si mes souvenirs sont b

2) électrostatique $\vec{F_{el}} = -\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\vec{u_r}$ gravitationnelle $\vec{F_g} = -\dfrac{G\, m_e m_p}{r_1^2}\vec{u_r}$

$\dfrac{F_g}{F_{el}} \ll 1$ donc on peut négliger la gravité.

3) $2\pi r = v \times T$ (période), pendant $\frac{dt}{T}$, on une charge $dq = \frac{dt}{T} \times e = \frac{v}{2\pi r} e\, dt = I dt$

d'où $I = \dfrac{v}{2\pi r} e$ et $\boxed{M = IS = \dfrac{r v}{2} e}$

4) or $L = m r \times v$ d'où $\boxed{M = \dfrac{L}{2m} e}$

5) $L = n\hbar$ d'où $\boxed{M = n\dfrac{\hbar e}{2m} = n\mu_B}$ $\boxed{\mu_B = \dfrac{\hbar e}{2m} \simeq 9{,}26 \cdot 10^{-24}\ A m^2}$

NB ⚠ il y a une erreur pour la valeur de e...

6) $E_p = -\vec{M}\cdot\vec{B} = -M B(z)\cos\theta$

et $\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p = +M\dfrac{dB}{dz}\cos\theta\, \vec{u_z}$

NB : il faut supposer θ = cste ce qui est vrai car il y a précession autour d'Oz mais pas évident...)

7) $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\Gamma} = \vec{M}\wedge\vec{B} = MB\sin\theta\,\vec{u}$

or $\vec{M} = \vec{L}\dfrac{e}{2m} \Rightarrow \dfrac{2m}{e}\dfrac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M}\wedge \underset{B\vec{e_z}}{\vec{B}}$

$\cdot\vec{e_z}$: $\dfrac{2m}{e}\dfrac{dM_z}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{M_z = \text{cste}}$

et $\cdot\vec{M}$: $\dfrac{2m}{e}\vec{M}\cdot\dfrac{d\vec{M}}{dt} = \dfrac{m}{e}\dfrac{dM^2}{dt} = \vec{M}\cdot(\vec{M}\wedge\vec{B}) = 0 \Rightarrow \boxed{M^2 = \text{cste}}$

et tourne à la pulsation $\boxed{\omega = \dfrac{e}{2m}}$

8) $\vec{M}$ tourne à $\omega \Rightarrow$ la projection de M sur (Oxy) est un cercle

et M_x et M_y sont nuls en moyenne.

9) Le PFD appliqué à l'atome s'écrit

si on suppose $\dfrac{dB}{dz}$ = cste (non précisé par l'énoncé)

$m_a \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma\vec{F} = M\dfrac{dB}{dz}\cos\theta\,\vec{u_z}$

sur Oz : $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = M\dfrac{dB}{dz}\cos\theta \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = M\dfrac{dB}{dz}\cos\theta\, t + v_{z0}$

$M\cos\theta = M_z$; $v_{z0} = 0$ par hyp.

$\boxed{z(t) = M_z\dfrac{dB}{dz}\dfrac{t^2}{2m} + v_{z0}\, t}$

Sur Ox $\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \Rightarrow x = v_{x_0} t + \underset{0}{\text{cste}}$

on arrive sur l'électroaimant t_0 tq $x(t_0) = v_{x_0} t_0 = 2l$

NB il y a incohérence ds un cas les pôles font 2l (figure) ds le texte ils font une longueur l... j'utilise la seconde

l'origine est bon dans le sens de ma figure ... je crois

en sortie de l'aimant on a : $z(t_0) = M_z \frac{dB}{dz}\frac{t_0^2}{2m}$ $\quad v_z(t_0) = M_z\frac{dB}{dz}\frac{t_0}{m}$

$x(t_0) = l$ $\quad v_x(t_0) = v_{x_0}$

à partir de là, il n'y a plus de champ magnétique d'où

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0 \Rightarrow z = v_z(t_0)\, t + z(t_0)$$

$$x = \underset{v_{x_0}}{v_x(t_0)}\, t + 2l$$

NB j'ai changé l'origine des temps.

on arrive sur l'écran pour $x(t_1) = l+D \Rightarrow v_{x_0} t_1 = D$

et alors $z(t_1) = v_z(t_0)\times t_1 + z(t_0) = M_z\frac{dB}{dz}\times\frac{2l}{m v_{x_0}}\times\frac{D}{v_{x_0}} + \frac{M_z dB}{2m\,dz}\left(\frac{2l}{v_{x_0}}\right)^2$

soit $z(t_1) = \dfrac{M\frac{dB}{dz}2l(l+D)}{\frac{1}{2}m v_{x_0}^2\; 2} = \boxed{\frac{1}{2E_c/z} M\frac{dB}{dz}2l(l+D)}$

11) si $\cos\theta$ est aléatoire on a une tache centrée sur l'axe.

11) on $\cos\theta = \pm 1$ $\quad$ AN $\quad M_z = \frac{2E_c}{z} z_1 \frac{1}{\frac{dB}{dz}2l(l+D)} = 8,2\cdot 10^{-24}$ A

on est pas très loin du premier modèle...

NB = $d\vec{E}$ n'a pas défini...

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS\,\vec{MP}}{4\pi\varepsilon_0 MP^3}$$

12) (Oxz) est plan de sym $\Rightarrow \vec{E} = E\vec{u}_z$
– (Oyz) " " "

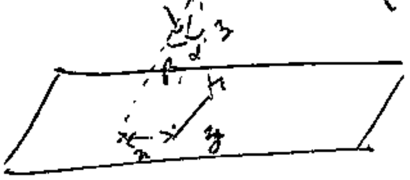
$\vec{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0\end{vmatrix}$ $\quad \vec{OP} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{MP} = \begin{vmatrix} -x \\ -y \\ z\end{vmatrix}$

13) $dE_z = d\vec{E}\cdot\vec{u}_z = \frac{\sigma dS\;\vec{MP}\cdot\vec{u}_z}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}$ or

et $dE_z = \frac{\sigma\, dx\, dy}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\;dx\,dy}{\left(\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{x'}\right)^2}\right)^3}$

$y^2+z^2 = \left(\frac{x}{x'}\right)^2$ $\quad 2dy\cdot y = \frac{2dx\,x}{x'^2} - \frac{2dx'}{x'^3}x^2$ $\quad 2dy\,y = -2\frac{dx'}{x'}(y^2+z^2)$

$dy = -dx'$



$x' = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} = \tan\beta$

Épreuve de physique - Filière PC - CCP 2016

Merci à Eddie Saudrais pour sa relecture attentive.
Ce corrigé peut être distribué à vos étudiants.

Problème A Le Haut-Parleur électrodynamique

A.1. Étude temporelle du fonctionnement

A.1.1. La source fournit un signal électrique et on cherche à mettre en mouvement mécanique la membrane afin de générer des ondes mécaniques. On convertit donc une puissance électrique en puissance mécanique.

A.1.2.

A.1.2.1- Le circuit est mobile et placé dans une zone de champ magnétique. Il peut donc y avoir création d'une fem induite. *Son expression dépasse le cadre du programme car il faut considérer ici un flux coupé. Il n'est donc pas possible d'aller plus loin dans la justification.*

A.1.2.2- En appliquant la loi des mailles : $\boxed{u - R.i - L.\dfrac{di}{dt} + e = 0}$, avec

- e : la fem induite évoquée plus haut
- $-L.\dfrac{di}{dt}$: la fem due à l'auto-induction
- $R.i$: tension aux borne de la résistance, associée à une phénomène de déperdition par effet Joule.

A.1.3. $\overrightarrow{df_L} = I.\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = i(t).dl\overrightarrow{u_\theta} \wedge B\overrightarrow{u_r}$ donc $\boxed{\overrightarrow{df_L} = -i(t).B.dl.\overrightarrow{u_z}}$

A.1.4. On reconnait l'expression des différentes forces appliquées au système elon l'axe Oz, en considérant cet axe horizontal :

- Force de Laplace $\overrightarrow{f_l} = \int_{spires} \overrightarrow{df_L} = -i(t).B.l.\overrightarrow{u_z}$
- Force de rappel exercée par le spider : $\overrightarrow{F_{rappel}} = -k.\Delta l.\overrightarrow{u_z}$ avec $\Delta l = l_{eq} + z - l_0$. Mais si l'axe Oz est horizontal, $l_{eq} = l_0$
- $f_{air} = -\lambda.\overrightarrow{v}$ force de frottement fluide avec l'air.

Il suffit de poser $\overrightarrow{v} = z'(t).\overrightarrow{u_z}$ pour obtenir $\boxed{m.z''(t) = -i(t).l.B - k.z(t) - \lambda.z'(t)}$

A.2. Régime sinusoïdal forcé

A.2.1.

- Pour l'équation électrique : $\underline{u} - R.\underline{i} - j.L.\omega\underline{i} + z'(t).B.l = 0$
- Pour l'équation mécanique : $-m.\omega^2.\underline{z} = -\underline{i}l.B - k.\underline{z} - \lambda.j.\omega.\underline{z}$

A.2.2. Il faut donc éliminer par substitution $\underline{z}$. L'équation électrique permet d'écrire $\underline{z} = \dfrac{-\underline{u} + R.\underline{i} + j.L.\omega.\underline{i}}{j.L.\omega.B}$

Que l'on remplace dans l'équation mécanique : $\left(-m.\omega^2 + \lambda.j.\omega. + k\right) \dfrac{-\underline{u} + R.\underline{i} + j.L.\omega.\underline{i}}{j.L.\omega.B} = -l.B\underline{i}$

On regroupe les termes : $\underline{u}.\left(m.\omega^2 - j.\omega.\lambda - k\right) = \underline{i}.\left[\left(m.\omega^2 - j.\omega.\lambda - k\right)(R + j.L.\omega) - j.\omega.B^2.l^2\right]$

Ce qui amène à l'expression $\boxed{\underline{Z} = \underbrace{\dfrac{-j.\omega.B^2.l^2}{m.\omega^2 - j.\lambda.\omega - k}}_{\underline{Z}_m} + \underbrace{(R + j.L.\omega)}_{\underline{Z}_e}}$

A.2.3. Le couplage électro-mécanique se fait grâce à l'existence du champ magnétique. En posant $B = 0$, on doit donc obtenir $\underline{Z} = \underline{E}_e$ d'où les expressions des impédances ci-dessus.

A.2.4. On a $\underline{Y}m = \dfrac{m.\omega^2 - j.\lambda.\omega - k}{-j.\omega.B^2.l^2} = \dfrac{m.\omega^2}{-j.\omega.B^2.l^2} + \dfrac{-j.\lambda.\omega}{-j.\omega.B^2.l^2} + \dfrac{k}{j.\omega.B^2.l^2}$

Soit $\underline{Y}m = \dfrac{m}{B^2.l^2}j.\omega + \dfrac{\lambda}{B^2.l^2} + \dfrac{k}{B^2.l^2}.\dfrac{1}{j.\omega}$. On reconnaît donc $\boxed{C_m = \dfrac{m}{B^2.l^2}\ ;\ R_m = \dfrac{B^2.l^2}{\lambda} \text{ et } L_m = \dfrac{B^2.l^2}{k}}$

A.N. : $C_m = \dfrac{4.10^{-3}}{(1,05.3,81)^2} = 2,5.10^{-4}\ F$; $L_m = \dfrac{(1,05.3,81)^2}{1250} = 12,8\ mH$ et $R_m = \dfrac{(1,05.3,81)^2}{1} = 16\ \Omega$

A.2.5. On a donc $\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} + \underline{Z}_e = \dfrac{1}{j.\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right) + \dfrac{1}{R_m}} + \underline{Z}_e = \dfrac{\dfrac{1}{R_m} - j.\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)}{\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 + \dfrac{1}{R_m^2}} + R + j.L.\omega$

Or $\mathcal{R}e\left(\underline{Z}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{R_m}}{\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 + \dfrac{1}{R_m^2}} + R = \dfrac{R_m^2}{R_m^2}.\dfrac{\dfrac{1}{R_m}}{\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 + \dfrac{1}{R_m^2}} + R$

On retrouve bien la relation proposée.

A.2.6.

- On remarque que si $\omega \to 0$ $\left(\text{ou } \omega \ll \dfrac{1}{\sqrt{C_m.L_m}}\right)$ alors $R_T \to R$ car $\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 \equiv \left(-\dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 \to \infty$

  On lit donc $\boxed{R = 8\ \Omega}$

- D'autre part $R_T(\omega)$ admet son maximum pour $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{C_m.L_m}} = \dfrac{1}{\sqrt{2,5.10^{-4}.12,8.10^{-3}}} = 559\ rad.s^{-1}$, soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2.\pi} = 89\ Hz$.

  On lit bien une pulsation d'environ 550 $rad.s^{-1}$ pour la résonance.

A.3. Étude énergétique

A.3.1. On part de l'équation électrique et on multiplie par $i(t)$: $u.i = R.i.i + L.\dfrac{di}{dt}.i + z'.B.l.i$

- L'énergie magnétique s'écrit $E_{magn} = \dfrac{1}{2}.L.i^2$ donc $\dfrac{d\left(E_{magn}\right)}{dt} = \dfrac{1}{2}.L.2.i.\dfrac{di}{dt}$
- La puissance des forces de Laplace a pour expression $\mathcal{P}_L = \overrightarrow{f_L} \cdot \overrightarrow{v} = -i.l.B.z'$
- La puissance dissipée par effet Joule par la résistance a pour expression $\mathcal{P}_J = R.i^2$

On retrouve donc le bilan proposé.

A.3.2. On part de l'équation mécanique et on multiplie pas $v = \dfrac{dz}{dt}$: $m.\dfrac{dv}{dt}.v = -i.l.B.v - k.z.\dfrac{dz}{dt} - \lambda.v.v$

- L'énergie cinétique s'écrit $E_c = \dfrac{1}{2}.m.v^2$ donc $\dfrac{d\left(E_c\right)}{dt} = \dfrac{1}{2}.m.2.v.\dfrac{dv}{dt}$
- On retrouve la puissance des forces de Laplace $\mathcal{P}_L = \overrightarrow{f_L} \cdot \overrightarrow{v} = -i.l.B.z'$
- La puissance de la force de frottement fluide a pour expression $\overrightarrow{f}_{air} \cdot \overrightarrow{v} = -\lambda.v^2$. On pose $\mathcal{P}_A = \lambda.v^2$
- L'énergie potentielle associée à la force de rappel élastique a pour expression, en considérant $\Delta l = z$: $E_{pe} = \dfrac{1}{2}.k.z^2$ donc $\dfrac{d\left(E_{pe}\right)}{dt} = k.z$

On retrouve donc le bilan proposé.

A.3.3. On substitue à la puissance de Laplace dans le bilan mécanique son expression obtenue grâce au bilan électrique, ce qui amène directement au bilan proposé, avec :
$\boxed{E_m = E_c + E_{pe}}$

A.3.4. *On rappelle que pour une fonction f de période T, $\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt}.dt = \frac{f(t_0+T) - f(t_0)}{T} = 0$. Cette propriété sera utilisé au cours des questions suivantes également*
$\left\langle \frac{d\left(E_M + E_{magn}\right)}{dt} \right\rangle = 0$. Il reste donc $\langle \mathcal{P}_S \rangle = \langle u.i \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle + \langle \mathcal{P}_A \rangle$
Donc $\langle \mathcal{P}_S \rangle = R.\left\langle i^2 \right\rangle + \lambda.\left\langle v^2 \right\rangle$
L'objectif de ce haut-parleur est de générer des ondes mécaniques. Le couplage s'effectue ici par la force "de frottement fluide". La puissance utile correspond donc aux interactions avec l'air, donc à $\langle \mathcal{P}_A \rangle$.
On peut en déduire l'expression du rendement $\eta = \frac{\textit{Ce que l'on souhaite obtenir}}{\textit{Ce qui est coûteux}} = \frac{\langle \mathcal{P}_A \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}$
Comme $\eta = \langle \mathcal{P}_A \rangle = \langle \mathcal{P}_S \rangle - \langle \mathcal{P}_J \rangle$, on obtient donc $\eta = \frac{\langle \mathcal{P}_S \rangle - \langle \mathcal{P}_J \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}$ soit $\boxed{\eta = 1 - \frac{R.\left\langle i^2 \right\rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}}$

A.3.5. $u = R_T.i + L.\frac{di}{dt}$ donc $u.i = R_T.i^2 + L.\frac{di}{dt}.i = R_T.i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.L.i^2\right)$
En passant à la valeur moyenne et comme $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.L.i^2\right) = 0$, il reste $\langle u.i \rangle = R_T.\left\langle i^2 \right\rangle$
Donc $\eta = 1 - \frac{R.\left\langle i^2 \right\rangle}{R_T.\left\langle i^2 \right\rangle}$: $\boxed{\eta = 1 - \frac{R}{R_T} = \frac{R_T - R}{R_T}}$

A.3.6. Comme $\eta = 1 - \frac{R}{R_T}$, η est maximum si R_T est maximum, donc pour $\omega = \omega_0 = 550\ rad.s^{-1}$, ce qui est bien en accord avec la représentation fournie.

A.3.7. On va rechercher la zone de rendement maximal, soit autour de $f_0 = 89\ Hz$. L'oreille a une bande passante allant environ de $40\ Hz$ à $20\ kHz$. Ce haut-parleur restitue donc les sons graves.

A.3.8. Un enceinte doit restituer avec un même rendement l'ensemble du spectre audible. Or le rendement du haut-parleur décroît rapidement lorsque l'on s'éloigne de la pulsation de résonance. Il ne peut donc couvrir de façon acceptable l'ensemble du spectre audible. Il est donc nécessaire d'avoir des haut-parleur avec des bandes passantes spécifiques grave-médium-aigu en général.