# DS5 - Correction

## *Sources en mouvement et « murs d'ondes » …*

## PROBLEME A : LE MUR DE LA CATENAIRE

**A.1**- Les angles d'inclinaison α restant très petits (il aurait été souhaitable que cette hypothèse de l'énoncé soit présente dès le A.1, et non pas simplement en A.2) leur cosinus est assimilable à 1 (à l'ordre 1 en α). La masse dm du morceau de câble GD est donc $\boxed{dm = \mu\ dx}$.

Il est légitime de supposer le câble quasi-inextensible et le mouvement de GD proche d'une $\boxed{\text{translation parallèle à Oy}}$.

**A.2** – On applique le théorème de la résultante dynamique à la portion de câble GD, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La projection selon Ox donne : $0 = -\|\vec{T}(x,t)\|\cos(\alpha(x,t)) + \|\vec{T}(x+dx,t)\|\cos(\alpha(x+dx,t))$ (1)

La projection selon Oy donne : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -\|\vec{T}(x,t)\|\sin(\alpha(x,t)) + \|\vec{T}(x+dx,t)\|\sin(\alpha(x+dx,t))$ (2)

A l'ordre 1 en α, (1) donne $\|\vec{T}(x,t)\| = \|\vec{T}(x+dx,t)\|$. A chaque instant, la tension dans la corde est la même tout le long de celle-ci. Cette tension est $T_0$ indiquée dans le préambule de la question A.1, $\boxed{\text{ce qui donne bien}}$ $\|\vec{T}(x,t)\| = \|\vec{T}(x+dx,t)\| = T_0$

A l'ordre 1 en α, (2) donne $\boxed{\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -T_0\alpha(x,t) + T_0\alpha(x+dx,t)}$, d'où $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,t)$. Notons que (x,t) manque dans le terme de gauche de l'énoncé.

**A.3** – En assimilant le petit angle α à sa tangente et donc au coefficient directeur de la tangente à la courbe décrite par la corde, on peut écrire $\boxed{\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}}$, d'où $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$, ce qui est bien de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, avec $\boxed{v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$.

$v$ représente la $\boxed{\text{célérité de l'onde}}$. Son unité est $\boxed{\sqrt{\frac{kg.m.s^{-2}}{kg.m^{-1}}}}$, ce qui donne bien des m/s.

**A.4** – En écrivant la condition d'équilibre d'une masse M, on montre aisément que la tension $T_0$ dans la caténaire est $\boxed{T_0 = Mg}$.

**A.5** – Les poulies étant sans frottement, la $\boxed{\text{norme de la tension } T_1 \text{ du fil est la même tout le long}}$ de celui-ci (on le montre en appliquant le théorème du moment dynamique à chaque poulie et en exploitant le fait que les fils sont sans masse).

En appliquant le théorème de la résultante dynamique à la masse $M$, puis en projetant selon la verticale ascendante : $-Mg + T_1 = 0$. En appliquant la même loi à l'ensemble constitué de la poulie 2, de la tige et de la masse $K$, $-Kg + 2T_1 = 0$.

Il vient $\boxed{K = 2M}$.

Remarque : on peut retrouver ceci par un raisonnement énergétique : si M monte de h, K monte de h/2.

Le "facteur de démultiplication" n'est pas défini, mais on peut penser qu'il s'agit du rapport $\boxed{K/M, \text{ qui vaut ici } 2}$.

**A.6** – Toujours en considérant que la norme de la tension (notée ici $T_2$) est la même tout le long du fil, on peut écrire que la tige du bas et les 3 poulies associées sont soumises à une force verticale ascendante $6T_2$. Le rapport de démultiplication vaut donc $\boxed{6}$ ici.

**A.7** – Notons ρ la masse volumique du cuivre et S la section de la caténaire. La masse linéïque est $\boxed{\mu = \rho S}$. L'application numérique donne $\boxed{\mu = 1{,}3 \text{ kg/m}}$. La célérité des ondes transverses est $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ d'où $\boxed{v = 140\,\frac{m}{s} = 502\,km/h}$

**A.8** – Pour « repousser le mur de la caténaire », il faut $\boxed{\text{augmenter la tension } T_0}$ ou bien $\boxed{\text{diminuer la masse linéïque}}$ de la caténaire. La plus simple à mettre en œuvre est $\boxed{\text{d'augmenter la tension grâce à un palan}}$.

**A.9** – Notons $v_{record}$ la vitesse du record. La célérité des ondes transverses doit être au moins $v_{min} = v_{record}/0{,}97$. Il faut donc une tension minimale $\boxed{T_{min} = \mu v^2_{min} = \mu v^2_{record}/0.97^2 = 36 \text{ kN}}$. Par rapport à la tension standard de 26 kN, il faut donc ajouter 10 kN. Mais grâce au palan, il suffit d'un ajout de 10/6 kN, donc une masse de $10^3/6$, soit $\boxed{167 \text{ kg}}$, si on prend g = 10 m/s².

# PROBLEME B : CÔNE DE MACH

**B.1**- La masse molaire moyenne de l'air est $\boxed{M = 0{,}2M_{O2} + 0{,}8M_{N2} = 29 \text{ g/mol}}$ (avec 2 chiffres significatifs).

**B.2**- La célérité du son est donc en $K^a.(kg.mol^{-1})^b.(kg.m^2.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1})^d$. Pour obtenir une célérité en m/s, il faut donc que :

a - d = 0

b + d = 0

2d = 1

Il vient donc $\boxed{a = d = -b = 0{,}5}$ . Ainsi, une formule possible est $\boxed{c = \sqrt{\frac{RT}{M}}}$

**B.3**- Le coefficient 1,4 correspond au rapport $\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v} \text{ des capacités calorifiques à pression et volume constants}}$.

Sa valeur est 1,4 pour un gaz diatomique car aux températures usuelles, l'énergie interne d'un gaz parfait diatomique est approximativement $U = \frac{5}{2}nRT$en raison des 5 degrés de liberté (3 de translation et 2 de rotation).

L'enthalpie est $H = U + PV = \frac{7}{2}nRT$. Ainsi, $\boxed{\gamma = \frac{7}{5}}$

Remarque : la justification de la valeur de $\gamma = 1{,}4$ est hors-programme.

**B.4**- La célérité du son à -20°C est donc $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 1{,}2.10^3 km/h}$

**B.5**- L'avion qui vole à *mach* 2 a une vitesse $v_a$ = $\boxed{2{,}4.10^3 km/h}$

**B.6**- Les ondes sonores émises par l'avion supposé ponctuel sont des $\boxed{\text{ondes sphériques}}$.

**B.7**- A l'instant $-\tau$, l'avion se trouvait en $x_\tau = -v\tau$. A l'instant t > 0, le rayon de la surface d'onde sonore émise à $-\tau$ est :

$\boxed{R(\tau, t) = c(t + \tau)}$

**B.8**- L'équation que l'on nous demande n'est pas cartésienne puisque l'on se place en coordonnées cylindriques. Dans tout plan $\theta = Cte$, on a un cercle de centre $x_\tau$ et de rayon $\boxed{R(\tau, t)}$, d'où $(x - x_\tau)^2 + \rho^2 = R^2(\tau, t)$ et $\boxed{\rho = \sqrt{c^2(t + \tau)^2 - (x + v\tau)^2}}$.

**B.9**- La condition (2) de l'énoncé donne : $2c^2(t + \tau) - 2v(x + v\tau) = 0$, d'où $c^2t - vx = (v^2 - c^2)\tau$ et $\boxed{\tau = \frac{c^2t - vx}{v^2 - c^2}}$.

En remplaçant dans l'expression de ρ, il vient : $\rho = \sqrt{c^2\left(\frac{tv^2 - xv}{v^2 - c^2}\right)^2 - \left(\frac{vc^2t - xc^2}{v^2 - c^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{c^2v^2(tv - x)^2 - c^4(tv - x)^2}}{v^2 - c^2}$,

Ou encore : $\rho = \frac{c(tv - x)\sqrt{v^2 - c^2}}{v^2 - c^2}$ puis $\rho = \frac{c(tv - x)}{\sqrt{v^2 - c^2}}$, ce qui est bien de la forme $\rho = \psi.(vt - x)$, avec $\boxed{\psi = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}}$.

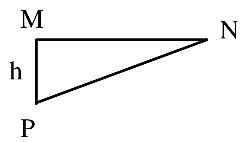
**B.10**- Soit le triangle ABC où A est le point où se trouve l'avion à $-\tau$, B le point où il se trouve à t, et C un point du cône se trouvant sur la sphère de centre A et de rayon $R(\tau, t)$. Ce triangle est rectangle en C, puisque la sphère y est tangente au cône.

On a donc : $\sin\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{c(t + \tau)}{v(t + \tau)}$ donc $\boxed{\sin\beta = \frac{c}{v}}$.

Remarque : on peut aussi écrire que $\tan\beta = \psi = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$

**B.11**- Avec les valeurs numériques de B.5 (et non B.4 !), on a $\boxed{\beta = \frac{\pi}{6} rad}$.

**B.12**- Lorsque l'avion est au-dessus de la tête de P, il est en M. Lorsque P entend le bang, l'avion est en N. On a donc $MN = v\,\Delta t$. L'angle en N du triangle est β, d'où $\tan\beta = \frac{h}{v\,\Delta t}$




Il vient $\Delta t = \frac{h}{v\tan\beta}$, ou encore $\boxed{\Delta t = \frac{h\sqrt{v^2 - c^2}}{vc}}$ .

# PROBLEME C : LE SILLAGE DE LORD KELVIN

**C.1**- Le terme $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$ est négligeable devant le terme $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ si la norme du champ des vitesses reste petite devant la célérité (vitesse de phase) des ondes. En effet, le premier terme a pour ordre de grandeur $v^2/L$, où L est une longueur caractéristique de l'onde ; et le second a pour ordre de grandeur $v/T$, $T$ étant une durée caractéristique de l'onde.

**C.2**- Lorsque le fluide est à l'équilibre, l'équation d'Euler devient $\overrightarrow{grad}P_e = \rho\vec{g}$ ; on en déduit que la pression $P_e$ à l'équilibre ne dépend que de $z$ et $dP_e/dz = -\rho g$. En intégrant : $\boxed{P_e = P_0 - \rho g z}$ (pour $z < 0$).

**C.3**- L'équation d'Euler simplifiée en C.1 s'écrit : $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g}$.

L'équation de l'équilibre est $\vec{0} = -\overrightarrow{grad}P_e + \rho\vec{g}$

$\boxed{\text{Par différence}}$, en posant $\tilde{p}(x,z,t) = P(x,z,t) - P_e(z)$ , et en passant en notation complexe, il vient bien : $\rho\frac{\partial\underline{\vec{v}}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\underline{\tilde{p}}$

En projetant cette dernière équation, on obtient :

$\rho j\omega v_x(z)e^{j(\omega t-kx)} = jkf(z)e^{j(\omega t-kx)}$ (3)

$\rho j\omega v_z(z)e^{j(\omega t-kx)} = -\frac{df}{dz}(z)e^{j(\omega t-kx)}$ (4)

L'équation de conservation de la masse s'écrit ici $div\underline{\vec{v}} = 0$ puisque le fluide est incompressible, donc en écoulement incompressible. Cela donne :

$-jkv_x(z)e^{j(\omega t-kx)} + \frac{dv_z}{dz}(z)e^{j(\omega t-kx)} = 0$ (5)

Après simplification, ces équations deviennent :

$\rho\omega v_x(z) = kf(z)$ (3')

$\rho j\omega v_z(z) = -\frac{df}{dz}(z)$ (4')

$-jkv_x(z) + \frac{dv_z}{dz}(z) = 0$ (5')

En dérivant (4') par rapport à z puis en utilisant les deux autres équations, il vient :

$\frac{d^2f}{dz^2}(z) = -\rho j\omega jk\frac{k}{\rho\omega}f(z)$, c'est-à-dire $\frac{d^2f}{dz^2}(z) = k^2f(z)$, ce qui est de la forme donnée en posant $\boxed{\beta = k}$.

**C.4**- La résolution de l'équation différentielle du second ordre précédente donne $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$. Et puisque l'eau est très profonde, il faut poser $\boxed{B = 0 \text{ pour que la pression ne diverge pas}}$. En $\boxed{\text{posant } A = p_1}$, il vient :

$\underline{\tilde{p}} = p_1e^{kz}e^{j(\omega t-kx)}$, et en prenant la partie réelle : $\tilde{p} = p_1e^{kz}\cos(\omega t - kx)$

**C.5**- D'après C.2 et C.3, on a $\tilde{p}(x,z,t) = P(x,z,t) - P_0 + \rho g z$. Pour $z = \xi(x,t)$, $P = P_0$.

On peut donc écrire : $p_1e^{k\xi(x,t)}\cos(\omega t - kx) = \rho g\xi(x,t)$, et en remplaçant $\xi(x,t)$ par $a\cos(\omega t - kx)$ :

$p_1e^{ka\cos(\omega t-kx)}\cos(\omega t - kx) = \rho g a\cos(\omega t - kx)$.

Ceci étant vrai pour tout t et out x, $\boxed{p_1e^{ka\cos(\omega t-kx)} = \rho g a}$.

Pour des ondes de petite amplitude, $ka \ll 1$ et $e^{ka\cos(\omega t-kx)} \simeq 1$, ce qui donne bien $p_1 = \rho g a$

**C.6**- En reprenant l'équation (4'), on peut écrire : $v_z(z) = -\frac{1}{j\rho\omega}\frac{df}{dz}(z) = -\frac{1}{j\rho\omega}kp_1e^{kz}$ puis $\underline{v_z} = -\frac{1}{j\rho\omega}kp_1e^{kz}e^{j(\omega t-kx)}$.

Ceci est bien de la forme $\underline{v_z} = -\frac{1}{j\rho\omega}h(z)e^{j(\omega t-kx)}$, en posant $\boxed{h(z) = kp_1e^{kz} = k\rho g a\, e^{kz}}$

**C.7**- A l'interface eau-air, $\underline{v_z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}$, d'où $-\frac{1}{j\rho\omega}k\rho g a e^{kz}e^{j(\omega t-kx)} = j\omega a\, e^{j(\omega t-kx)}$, puis $\frac{1}{\omega}kge^{kz} = \omega$.

Dans cette expression, $z = \xi$, et comme en C.5, $e^{ka\cos(\omega t-kx)} \simeq 1$. Finalement, $kg = \omega^2$ et $\omega = (kg)^\alpha$ avec $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

**C.8**- $\omega$ est en $s^{-1}$, g est en $m.s^{-2}$, k est en $m^{-1}$ donc gk est en $s^{-2}$, ce qui $\boxed{\text{valide}}$ $\alpha = \frac{1}{2}$.

**C.9**- La vitesse de phase est $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}}$. La vitesse de groupe est $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}}}$. On remarque que $\boxed{v_g = \frac{1}{2} v_\varphi}$

## PROBLÈME D

B.1.a. $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$

B.1.b. L'eau est incompressible donc div $\vec{v} = 0$. Le débit volumique est le même à travers toute section droite du canal.

B.1.c. L'écoulement est unidimensionnel donc $Q = \iint_\Sigma \vec{v}.\vec{n}_\Sigma dS = vLh.$

B.1.d. L'écoulement est parfait, incompressible et stationnaire. La seule force (autre que la pression) considérée est conservative donc on a $\dfrac{1}{2}\rho v_A{}^2 + \rho g z_A + p_A = C$ en tout point $A$ d'une ligne de courant.

B.1.e. On considère une ligne de courant entre un point à la surface du canal (pression $p_0$, altitude $h$, vitesse $v$) et un point au sommet de la colonne dans le tube (pression $p_0$, altitude $h + z$, vitesse nulle) $\dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p_0 = \rho g(h + \mathrm{z}) + p_0$ d'où $v = \sqrt{2gz}$.

B.1.f. $Q = Lh\sqrt{2gz}$ A.N. $Q = 4\times 3\times\sqrt{2.10.10\times 10^{-2}} = 17\ \mathrm{m^3.s^{-1}}$.

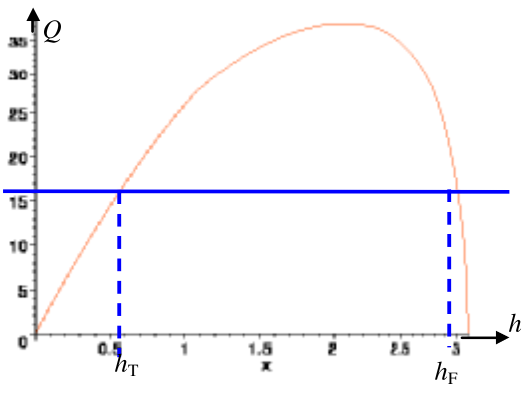
B.2.a. En tout point d'une ligne de courant sur l'interface entre l'eau et l'atmosphère, on a $\dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p_0 = C$ d'où $e = (\dfrac{1}{2}v^2 + gh) = \dfrac{C - p_0}{\rho} = Cte$. La quantité $e$ est donc uniforme tout le long du canal.

B.2.b. $e = \dfrac{1}{2}\ v^2 + \ gh$ est est l'énergie mécanique par unité de masse.

A.N. $e = g(h + z) = 10(3 + 0{,}1) = 31\ \mathrm{J.kg^{-3}}$

B.2.c. $Q = Lh\sqrt{2(e - gh)}$.

B.2.d. La courbe numérique $Q(h) = 4h\sqrt{2(31 - 10h)}$ est la suivante : une valeur donnée $Q$ (inférieure à $Q_{\mathrm{MAX}}$) est obtenue pour deux valeurs $h_T$ et $h_F$ de la profondeur.




B.2.e. $Q_{\mathrm{MAX}}$ est obtenu pour $\dfrac{dQ}{dh} = 0$. Or $\dfrac{dQ}{dh} = L\sqrt{2(e - gh)} + \dfrac{1}{2}Lh\dfrac{-2g}{\sqrt{2(e - gh)}} = L\dfrac{2e - 3gh}{\sqrt{2(e - gh)}}$.

$Q$ est maximal pour la hauteur critique $h_C = \dfrac{2e}{3g}$

A.N. $h_C = \dfrac{2\times 31}{3\times 10} = 2{,}07$ m

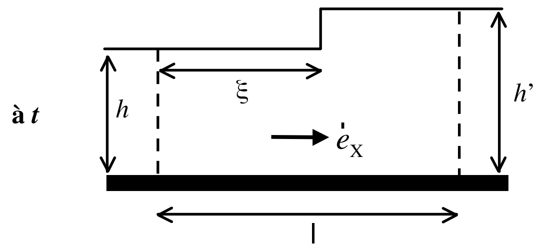
B.2.f. On a alors $Q_{\mathrm{MAX}} = \dfrac{2eL}{3g}\sqrt{2(e - \dfrac{2}{3}e)} = \left(\dfrac{2e}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\dfrac{L}{g}$ d'où $v_{\mathrm{MAX}} = \dfrac{Q_{\mathrm{MAX}}}{Lh_{\mathrm{MAX}}} = \left(\dfrac{2e}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\dfrac{L\times 3g}{g\times 2e\times L}$ soit $v_{\mathrm{MAX}} = \left(\dfrac{2e}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ A.N. $v_{\mathrm{MAX}} = \sqrt{\dfrac{2\times 31}{3}} = 4{,}55\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Remarque : on a dans ce cas $v_{\mathrm{MAX}} = \sqrt{gh_{\mathrm{MAX}}}$.

B.2.g. Pour un débit $Q = v.L.h$ donné, avec $L$ fixé, $v$ est inversement proportionnel à $h$. Donc $h_T$ correspond à une grande vitesse d'écoulement : c'est le régime torrentiel ; $h_F$ correspond à une petite vitesse d'écoulement : c'est le régime fluvial.

B.3.a.La masse du système ($S$) est à l'instant $t$ : $\rho L h \xi + \rho L h'(\ell - \xi)$

et à $t + dt$, $\rho L h(\xi - vdt - wdt) + \rho L h'(\ell - \xi + wdt)$

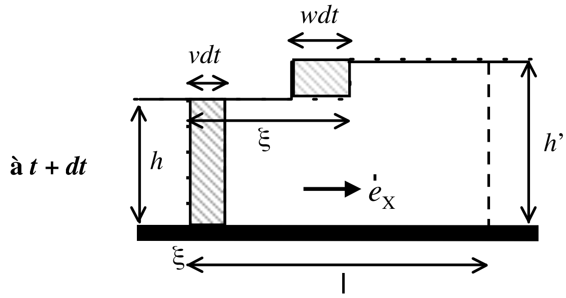



La conservation de la masse du système fermé entraîne l'égalité des deux expressions d'où :

$-\rho L h(vdt + wdt) + \rho L h' wdt = 0$

soit $(h' - h)w = hv$

B.3.b. La composante horizontale de la quantité de mouvement du système ($S$) est à l'instant $t$ : $\rho L h \xi\, v$ car la vitesse du fluide est nulle après le front d'onde




et à $t + dt$, $\rho L h(\xi - vdt - wdt)v$

Elle varie donc de $dP_X = -\rho L h(v + w)vdt$

soit $\dfrac{dP_X}{dt} = -\rho L h(v + w)v$ qui est bien de la forme demandée avec $g(v, w) = (v + w)v$.

B.3.c. En orientant l'axe vertical vers le bas, la pression en un point s'écrit $P = P^0 + \rho g z$.

B.3.d. Par définition, la résultante des forces de pression est $\vec{F} = \int_0^h P(z)\vec{n}dS$ = $\int_0^h (P^0 + \rho g z) L dz \vec{e}_X = P^0 L h + \rho g L \left( P^0 L h + \rho g \dfrac{h^2}{2} \right) \vec{e}_X$ en supposant que la paroi est perpendiculaire à l'axe $Ox$.

B.3.e. On a successivement $\vec{F}_G = \left( P^0 L h + \rho g \dfrac{h^2}{2} \right) \vec{e}_X$ ; $\vec{F}_D = -\left( P^0 L h' + \rho g \dfrac{h'^2}{2} \right) \vec{e}_X$ et $\vec{F}_F = P^0 L(h' - h)\vec{e}_X$ car la pression de l'air s'exerce uniformément sur le front de vague. La composante sur $\vec{e}_X$ de la résultante des forces exercées sur ($S$) est donc $\left( P^0 L h + \rho g \dfrac{h^2}{2} \right) - \left( P^0 L h' + \rho g \dfrac{h'^2}{2} \right) + P^0 L(h' - h) = \dfrac{1}{2}\rho g L\left(h^2 - h'^2\right)$.

B.3.f. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit $\dfrac{dP_X}{dt} = \dfrac{1}{2}\rho g L\left(h^2 - h'^2\right)$ d'où $-\rho L h(v + w)v = \dfrac{1}{2}\rho g L\left(h^2 - h'^2\right)$ soit $h(v + w)v = \dfrac{1}{2} g\left(h'^2 - h^2\right)$ qui est de la forme demandée en posant $f(h, h') = h'^2 - h^2$.

B.3.g. D'après B.3.a., on a $(h' - h)w = hv$ donc la relation précédente peut s'écrire $(h' - h)w\left(\dfrac{h' - h}{h} w + w\right) = \dfrac{1}{2} g\left(h'^2 - h^2\right)$ d'où $w^2\left(\dfrac{h'}{h} - 1 + 1\right) = \dfrac{1}{2} g(h' + h)$ soit $w = \sqrt{\dfrac{gh(h' + h)}{2h'}}$.

B.3.h. Si l'on fait $h = h'$, on trouve $w = \sqrt{gh}$. D'après la relation B.2.e. le débit est alors maximal dans la zone où l'eau s'écoule.